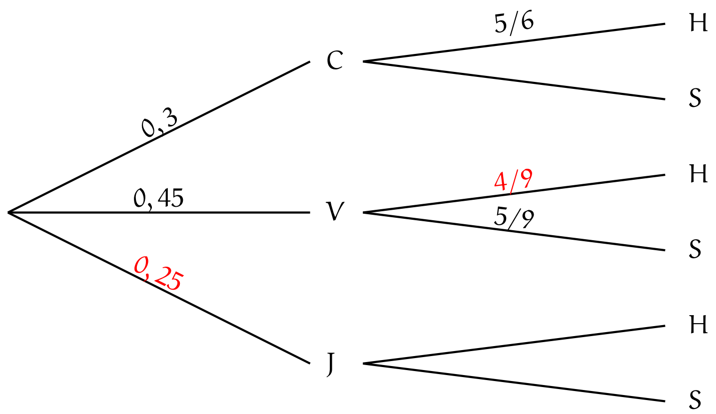
Polynésie 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

Partie 1

1) Représentons la situation par un arbre.



La probabilité demandée est $p(C \cap H)$. L'énoncé donne $p_C(H) = \frac{5}{6}$ et $p(C) = \frac{3}{10}$. Donc,

$$p(C \cap H) = p(C) \times p_C(H) = \frac{3}{10} \times \frac{5}{6} = \frac{3 \times 5}{2 \times 5 \times 2 \times 3} = \frac{1}{4}.$$

$$\boxed{p(C \cap H) = \frac{1}{4} = 0,25.}$$

2) a) $p(H) = \frac{13}{20} = 0,65$ et $p_C(H) = \frac{5}{6} = 0,8\ldots$. Ainsi, $p_C(H) \neq p(H)$ et donc

$$\boxed{\text{les événements } C \text{ et } H \text{ ne sont pas indépendants.}}$$

b) D'après la formule des probabilités totales,

$$p(H) = p(C \cap H) + p(V \cap H) + p(J \cap H).$$

On sait déjà que $p(H) = \frac{13}{20}$ et que $p(C \cap H) = \frac{1}{4}$. Ensuite,

$$p(V \cap H) = p(V) \times p_V(H) = \frac{45}{100} \times \left(1 - \frac{5}{9}\right) = \frac{45}{100} \times \frac{4}{9} = \frac{1}{5}.$$

On en déduit que

$$p(J \cap H) = p(H) - p(C \cap H) - p(V \cap H) = \frac{13}{20} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} = \frac{13 - 5 - 4}{20} = \frac{4}{20} = \frac{1}{5}.$$

$$\boxed{p(J \cap H) = \frac{1}{5} = 0,2.}$$

Enfin,

$$P_J(H) = \frac{p(J \cap H)}{p(J)} = \frac{1/5}{1/4} = \frac{4}{5}.$$

$$\boxed{P_J(H) = \frac{4}{5} = 0,8.}$$

Partie 2

1) Ici, $n = 60$ et $p = 0,3$. On note que $n \geqslant 30$, $np = 18$ et donc $np \geqslant 5$ et $n(1-p) = 42$ et donc $n(1-p) \geqslant 5$.

L'intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la proportion de morceaux de musique classique est

$$\left[p - 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}, p + 1,96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right] = \left[0,3 - 1,96\frac{\sqrt{0,3\times 0,7}}{\sqrt{60}}, 0,3 + 1,96\frac{\sqrt{0,3\times 0,7}}{\sqrt{60}}\right].$$

En arrondissant au millième de manière à élargir un peu l'intervalle, on obtient l'intervalle $[0,184; 0,416]$.

2) La fréquence observée de morceaux de musique classique est $\frac{12}{60} = 0,2$. Cette fréquence appartient à l'intervalle précédent. Donc, on peut accepter l'hypothèse que la fonction « lecture aléatoire » du lecteur MP3 de Thomas n'est pas défectueuse mais on ne connaît pas le risque de se tromper.

Partie 3

1) $P(180 \leqslant X \leqslant 220) = P(X \leqslant 220) - P(X \leqslant 180) = 0,841 - 0,159 = 0,682$.

$$\boxed{P(180 \leqslant X \leqslant 220) = 0,682 \text{ arrondi à } 10^{-3}.}$$

2) La probabilité demandée est $p(X \geqslant 240)$. Or,

$$p(X \geqslant 240) = 1 - p(X \leqslant 240) = 1 - 0,977 = 0,023$$

$$\boxed{P(X \geqslant 240) = 0,023 \text{ arrondi à } 10^{-3}.}$$

