Nouvelle Calédonie. Novembre 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

Proposition 1.	**VRAI**
Proposition 2.	**FAUX**
Proposition 3.	**VRAI**
Proposition 4.	**VRAI**
Proposition 5.	**VRAI**

1) $(1+i)^2 = 1+2i-1 = 2i$ puis $(1+i)^4 = \left((1+i)^2\right)^2 = (2i)^2 = -4$. Soit alors n un entier naturel.

$$(1+i)^{4n} = \left((1+i)^4\right)^n = (-4)^n.$$

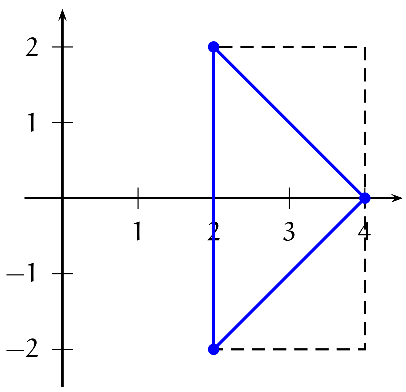
La proposition 1 est vraie.

2) Soit z un nombre complexe.

$$(z-4)\left(z^2-4z+8\right) = 0 \Leftrightarrow z = 4 \text{ ou } z^2-4z+8 = 0.$$

Le discriminant de l'équation $z^2-4z+8=0$ est $\Delta = (-4)^2 - 4\times 1\times 8 = -16 < 0$. L'équation $z^2-4z+8=0$ admet donc deux solutions non réelles conjuguées à savoir $z_1 = \dfrac{-(-4)+4i}{2} = 2+2i$ et $z_2 = \overline{z_1} = 2-2i$.

Les solutions de l'équation (E) dans $\mathbb{C}$ sont 4, $2+2i$ et $2-2i$.



L'aire du triangle dont les sommets ont pour affixes les solutions de (E) est la moitié de l'aire du rectangle de sommets les points de coordonnées $(2,2)$, $(4,2)$, $(4,-2)$ et $(2,-2)$. Cette aire est égale à $\dfrac{4\times 2}{2} = 4$. La proposition 2 est fausse.

3) Soit α un nombre réel.

$$1+e^{2i\alpha} = e^{i\alpha}\left(e^{-i\alpha}+e^{i\alpha}\right) = e^{i\alpha}(\cos\alpha - i\sin\alpha + \cos\alpha + i\sin\alpha) = 2e^{i\alpha}\cos(\alpha).$$

La proposition 3 est vraie.

4) $|1+i| = \sqrt{1^2+1^2} = \sqrt{2}$ puis

$$\frac{1}{2}(1+i) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{i\pi}{4}}.$$

En particulier, $\arg(z_A) = \dfrac{\pi}{4}$ $[2\pi]$ puis $\arg(z_{M_n}) = \arg\left((z_A)^n\right) = \dfrac{n\pi}{4}$ $[2\pi]$. On en déduit que $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OA}\right) = \dfrac{\pi}{4}$ $[2\pi]$ et que $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM_n}\right) = \dfrac{n\pi}{4}$ $[2\pi]$ puis que

$$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM_n}\right) = \left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{u}\right) + \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM_n}\right) = -\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OA}\right) + \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM_n}\right) = -\frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{4} = \frac{(n-1)\pi}{4}\ [2\pi].$$

Supposons de plus que $n-1$ soit divisible par 4. Posons $n = 4p$ où p est un entier naturel.

$$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OM_n}\right) = \frac{4p\pi}{4} = p\pi\ [2\pi].$$

Mais alors les points O, A et M_n sont alignés. La proposition 4 est vraie.

5) $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ puis

$$1 + j + j^2 = 1 + \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = 1 - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = 0.$$

La proposition 5 est vraie.

