Nouvelle Calédonie 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (5 points) (Commun à tous les candidats)

Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$ et $v_0 = 10$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	N est un entier U, V, W sont des réels

Début :	Affecter 0 à K
	Affecter 2 à U
	Affecter 10 à V
	Saisir N
	Tant que $K < N$
	    Affecter $K + 1$ à K
	    Affecter U à W
	    Affecter $\frac{2U + V}{3}$ à U
	    Affecter $\frac{W + 3V}{4}$ à V
	Fin tant que
	Afficher U
	Afficher V

Fin	

On exécute cet algorithme en saisissant $N = 2$. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous donnant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme.

K	W	U	V
0			
1			
2			

Partie B

1) a) Montrer que pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{5}{12}(v_n - u_n)$.

b) Pour tout entier naturel n, on pose $w_n = v_n - u_n$.
Montrer que pour tout entier naturel n, $w_n = 8\left(\frac{5}{12}\right)^n$.

2) a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.

b) Déduire des résultats des questions 1) b) et 2) a) que pour tout entier naturel n, on a $u_n \leqslant 10$ et $v_n \geqslant 2$.

c) En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.

3) Montrer que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite.

4) Montrer que la suite (t_n) définie par $t_n = 3u_n + 4v_n$ est constante.
En déduire que la limite commune des suites (u_n) et (v_n) est $\frac{46}{7}$.

