

Nouvelle Calédonie 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

Partie A

Tableau complété.

K	W	U	V
0		2	10
1	2	14/3	8
2	14/3	52/9	43/6

Partie B

1) a) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} v_{n+1} - u_{n+1} &= \frac{u_n + 3v_n}{4} - \frac{2u_n + v_n}{3} = \frac{3(u_n + 3v_n) - 4(2u_n + v_n)}{12} = \frac{-5u_n + 5v_n}{12} \\ &= \frac{5}{12}(v_n - u_n). \end{aligned}$$

$$\text{Pour tout entier naturel } n, v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{5}{12}(v_n - u_n).$$

b) D'après la question précédente, la suite (w_n) est géométrique de raison $q = \frac{5}{12}$. De plus, $w_0 = v_0 - u_0 = 10 - 2 = 8$. On sait alors que pour tout entier naturel n ,

$$w_n = w_0 \times q^n = 8 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n.$$

$$\text{Pour tout entier naturel } n, w_n = 8 \times \left(\frac{5}{12}\right)^n.$$

2) a) Soit n un entier naturel.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n + v_n}{3} - u_n = \frac{2u_n + v_n - 3u_n}{3} = \frac{v_n - u_n}{3} = \frac{w_n}{3}.$$

D'après la question précédente, pour tout entier naturel n , $w_n \geq 0$ et donc pour tout entier naturel n , $u_{n+1} - u_n \geq 0$ ou encore, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} \geq u_n$. Ceci montre que la suite (u_n) est croissante.

Soit n un entier naturel.

$$v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = \frac{u_n + 3v_n - 4v_n}{4} = \frac{u_n - v_n}{4} = -\frac{v_n - u_n}{4} = -\frac{w_n}{4}.$$

Pour tout entier naturel n , $w_n \geq 0$ et donc pour tout entier naturel n , $v_{n+1} - v_n \leq 0$ ou encore, pour tout entier naturel n , $v_{n+1} \leq v_n$. Ceci montre que la suite (v_n) est décroissante.

La suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) est décroissante.

b) Puisque la suite (u_n) est croissante, pour tout entier naturel n , on a $u_n \geq u_0$ ou encore pour tout entier naturel n , $u_n \geq 2$.

Puisque la suite (v_n) est décroissante, pour tout entier naturel n , on a $v_n \leq v_0$ ou encore pour tout entier naturel n , $v_n \leq 10$.

Puisque pour tout entier naturel n , on a $w_n \geq 0$, pour tout entier naturel n , on a $v_n \geq u_n$.

Par suite, pour tout entier naturel n , $u_n \leq v_n \leq 10$ et en particulier $u_n \leq 10$. De même, pour tout entier naturel n , $2 \leq u_n \leq v_n$ et en particulier $v_n \geq 2$.

Pour tout entier naturel n , $u_n \leq 10$ et $v_n \geq 2$.

c) La suite (u_n) est croissante et majorée par 10. Donc la suite (u_n) est convergente. De même, la suite (v_n) est décroissante et minorée par 2. Donc la suite (v_n) est convergente.

3) Posons $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ et $\ell' = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$.

Pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3}$. On fait tendre n vers $+\infty$ dans les deux membres de cette égalité et on obtient $\ell = \frac{2\ell + \ell'}{3}$ ou encore $3\ell = 2\ell + \ell'$ et donc $\ell = \ell'$.

On a montré que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite.

4) Soit n un entier naturel.

$$\begin{aligned} t_{n+1} &= 3u_{n+1} + 4v_{n+1} = 3 \times \frac{2u_n + v_n}{3} + 4 \times \frac{u_n + 3v_n}{4} = 2u_n + v_n + u_n + 3v_n \\ &= 3u_n + 4v_n = t_n. \end{aligned}$$

Donc, la suite (t_n) est constante. On en déduit que pour tout entier naturel n ,

$$t_n = t_0 = 3u_0 + 4v_0 = 3 \times 2 + 4 \times 10 = 46.$$

Ainsi, pour tout entier naturel n , $3u_n + 4v_n = 46$. Quand n tend vers $+\infty$, on obtient $3\ell + 4\ell = 46$ ou encore $\ell = \frac{46}{7}$.

On a montré que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{46}{7}.$$