

Liban 2013. Enseignement de spécialité

EXERCICE 4 (5 points) (candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 3$, $u_1 = 8$ et, pour tout n supérieur ou égal à 0 :

$$u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n.$$

1) Calculer u_2 et u_3 .

2) Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on souhaite calculer u_n à l'aide de l'algorithme suivant :

Variables : a , b et c sont des nombres réels
 i et n sont des nombres entiers naturels supérieurs ou égaux à 2

Initialisation : a prend la valeur 3
 b prend la valeur 8

Traitement : Saisir n
 Pour i variant de 2 à n faire
 c prend la valeur a
 a prend la valeur b
 b prend la valeur ...
 Fin Pour

Sortie : Afficher b

a) Recopier la ligne de cet algorithme comportant des pointillés et les compléter.

On obtient avec cet algorithme le tableau de valeurs suivant :

n	7	8	9	10	11	12	13	14	15
u_n	4 502	13 378	39 878	119 122	356 342	1 066 978	3 196 838	9 582 322	28 730 582

b) Quelle conjecture peut-on émettre concernant la monotonie de la suite (u_n) ?

3) Pour tout entier naturel n , on note C_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

On note A la matrice carrée d'ordre 2 telle que, pour tout entier naturel n ,

$$C_{n+1} = AC_n.$$

Déterminer A et prouver que, pour tout entier naturel n , $C_n = A^n C_0$.

4) Soient $P = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$.

Calculer QP .

On admet que $A = PDQ$.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n , $A^n = PD^nQ$.

5) À l'aide des questions précédentes, on peut établir le résultat suivant, que l'on admet.

Pour tout entier naturel non nul n ,

$$A^n = \begin{pmatrix} -2^{n+1} + 3^{n+1} & 3 \times 2^{n+1} - 2 \times 3^{n+1} \\ -2^n + 3^n & 3 \times 2^n - 2 \times 3^n \end{pmatrix}.$$

En déduire une expression de u_n en fonction de n .

La suite (u_n) a-t-elle une limite ?