

Liban 2013. Enseignement de spécialité

EXERCICE 4

1) $u_2 = 5u_1 - 6u_0 = 5 \times 8 - 6 \times 3 = 22$ et $u_3 = 5u_2 - 6u_1 = 5 \times 22 - 6 \times 8 = 62$.

$$u_2 = 22 \text{ et } u_3 = 62.$$

2) a)

Variables : a, b et c sont des nombres réels
 i et n sont des nombres entiers naturels supérieurs ou égaux à 2

Initialisation : a prend la valeur 3
 b prend la valeur 8

Traitement : Saisir n
Pour i variant de 2 à n faire
 c prend la valeur a
 a prend la valeur b
 b prend la valeur $5 \times a - 6 \times c$
Fin Pour

Sortie : Afficher b

b) Il semblerait que la suite (u_n) soit strictement croissante.

3) Soit n un entier naturel.

$$C_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5u_{n+1} - 6u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = AC_n,$$

où $A = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel n , $C_n = A^n C_0$.

- $A^0 C_0 = I_2 C_0 = C_0$ et donc l'égalité à démontrer est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que $C_n = A^n C_0$ et montrons que $C_{n+1} = A^{n+1} C_0$.

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= AC_n \\ &= A \times A^n C_0 \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= A^{n+1} C_0. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\text{pour tout entier naturel } n, C_n = A^n C_0.$$

4)

$$QP = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3 & -3+3 \\ 2-2 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel non nul n , $A^n = PD^nQ$.

- L'égalité à démontrer est vraie quand $n = 1$ d'après le résultat admis par l'énoncé.
- Soit $n \geq 1$. Supposons que $A^n = PD^nQ$ et montrons que $A^{n+1} = PD^{n+1}Q$.

$$\begin{aligned} A_{n+1} &= A \times A^n \\ &= PDQ \times PD^nQ \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= PDI_2D^nQ = PD \times D^nQ = PD^{n+1}Q. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que

$$\text{pour tout entier naturel non nul } n, A^n = PD^nQ.$$

5) Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = C_n = A^n C_0 = \begin{pmatrix} -2^{n+1} + 3^{n+1} & 3 \times 2^{n+1} - 2 \times 3^{n+1} \\ -2^n + 3^n & 3 \times 2^n - 2 \times 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 3 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 8(-2^n + 3^n) + 3(3 \times 2^n - 2 \times 3^n) \\ 2^n + 2 \times 3^n \end{pmatrix}.$$

On a montré que

$$\text{pour tout entier naturel non nul } n, u_n = 2^n + 2 \times 3^n.$$

Puisque $2 > 1$ et $3 > 1$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3^n = +\infty$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2 \times 3^n = +\infty$.

En additionnant, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty.$$