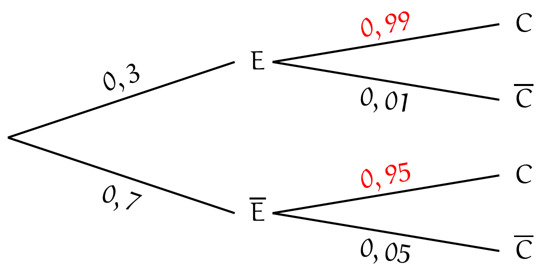
Liban 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

Partie A

1) Représentons la situation par un arbre.



2) La probabilité demandée est $p\left(\overline{E}\cap C\right)$.

$$p\left(\overline{E}\cap C\right) = p\left(\overline{E}\right)\times p_{\overline{E}}(C) = p\left(\overline{E}\right)\times\left(1-p_{\overline{E}}\left(\overline{C}\right)\right) = 0,7\times(1-0,05) = 0,7\times 0,95 = 0,665.$$

$$\boxed{p\left(\overline{E}\cap C\right) = 0,665.}$$

3) D'après la formule des probabilités totales,

$$p(C) = p\left(E\cap C\right) + p\left(\overline{E}\cap C\right) = p(E)\times p_E(C) + p\left(\overline{E}\right)\times p_{\overline{E}}(C).$$

On connaît déjà $p\left(\overline{E}\cap C\right) = 0,665$. D'autre part,

$$p\left(E\cap C\right) = p(E)\times p_E(C) = p(E)\times\left(1-p_E\left(\overline{C}\right)\right) = 0,3\times(1-0,01) = 0,3\times 0,99 = 0,297.$$

Finalement,

$$p(C) = 0,665+0,297 = 0,962.$$

$$\boxed{p\left(C\right) = 0,962.}$$

4) La probabilité demandée est $p_C(E)$.

$$p_C(E) = \frac{p\left(C\cap E\right)}{p(C)} = \frac{p(E)\times p_E(C)}{p(C)} = \frac{0,3\times 0,99}{0,962} = \frac{0,297}{0,962} = 0,308 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}$$

$$\boxed{p_C\left(E\right) = 0,308 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}}$$

Partie B

1) On rappelle qu'un pot est conforme si et seulement si la proportion de sucre dans la compote est comprise entre $0,16$ et $0,18$. La probabilité demandée est donc $P\left(0,16\leqslant X\leqslant 0,18\right)$. On lit dans le tableau

$$\boxed{\text{la probabilité qu'un petit pot issu de la chaîne } F_1 \text{ soit conforme est } 0,9044 \text{ à } 10^{-4} \text{ près.}}$$

2) a) Z suit la loi normale centrée réduite.

b)

$$0,16\leqslant Y\leqslant 0,18 \Leftrightarrow 0,16-m_2\leqslant Y-m_2\leqslant 0,18-m_2 \Leftrightarrow \frac{0,16-m_2}{\sigma_2}\leqslant\frac{Y-m_2}{\sigma_2}\leqslant\frac{0,18-m_2}{\sigma_2}$$
$$\Leftrightarrow \frac{0,16-0,17}{\sigma_2}\leqslant Z\leqslant\frac{0,18-0,17}{\sigma_2} \Leftrightarrow -\frac{0,01}{\sigma_2}\leqslant Z\leqslant\frac{0,01}{\sigma_2}$$

Y appartient à l'intervalle $[0,16;0,18]$ si et seulement si Z appartient à l'intervalle $\left[-\frac{0,01}{\sigma_2},\frac{0,01}{\sigma_2}\right]$.

c) L'énoncé donne $\mathsf{P}\left(-\dfrac{0,01}{\sigma_2} \leqslant \mathsf{Z} \leqslant \dfrac{0,01}{\sigma_2}\right) = 0,99 = \mathsf{P}(-2,5758 \leqslant \mathsf{Z} \leqslant 2,5758)$.
D'après le cours, on sait que

$$\mathsf{P}\left(-\frac{0,01}{\sigma_2} \leqslant \mathsf{Z} \leqslant \frac{0,01}{\sigma_2}\right) = \mathsf{P}(-2,5758 \leqslant \mathsf{Z} \leqslant 2,5758) \Leftrightarrow \frac{0,01}{\sigma_2} = 2,5758 \Leftrightarrow \sigma_2 = \frac{0,01}{2,5758}.$$

La calculatrice fournit alors

$\boxed{\sigma_2 = 0,004 \text{ à } 10^{-3} \text{ près par excès.}}$

