

France métropolitaine 2013. Enseignement de spécialité

EXERCICE 4

1) Soit n un entier naturel. Le nombre de personnes habitant la ville l'année $2013 + n + 1$ est obtenu en retranchant au nombre v_n de personnes habitant la ville l'année $2013 + n$, 5% de ce nombre puis en ajoutant 1% du nombre c_n de personnes habitant la campagne l'année $2013 + n$. Par suite,

$$v_{n+1} = (v_n - 0,05v_n) + 0,01c_n = 0,95v_n + 0,01c_n.$$

De même,

$$c_{n+1} = (c_n - 0,01c_n) + 0,05v_n = 0,99c_n + 0,05v_n.$$

$$\text{Pour tout entier naturel } n, v_{n+1} = 0,95v_n + 0,01c_n \text{ et } c_{n+1} = 0,05v_n + 0,99c_n.$$

2)

$$Y = AX = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,01 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,95a + 0,01b \\ 0,05a + 0,99b \end{pmatrix}.$$

3) a)

$$\begin{aligned} PQ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + (-1) \times (-5) & 1 \times 1 + (-1) \times 1 \\ 5 \times 1 + 1 \times (-5) & 5 \times 1 + 1 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \\ &= 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 6I, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} QP &= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \times 1 + 1 \times 5 & 1 \times (-1) + 1 \times 1 \\ (-5) \times 1 + 1 \times 5 & (-5) \times (-1) + 1 \times 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \\ &= 6 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 6I. \end{aligned}$$

On en déduit que la matrice P est inversible et que

$$P^{-1} = \frac{1}{6}Q = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{aligned} P^{-1}AP &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,95 & 0,01 \\ 0,05 & 0,99 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4,7 & 0,94 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 5,64 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,94 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

$$P^{-1}AP = D \text{ où } D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0,94 \end{pmatrix}.$$

c) Démontrons par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A^n = PD^nP^{-1}$.

- Puisque $D = P^{-1}AP$, on a encore $PDP^{-1} = PP^{-1}APP^{-1} = IAI = A$ et donc l'égalité à démontrer est vraie quand $n = 1$.
- Soit $n \geq 1$. Supposons que $A^n = PD^nP^{-1}$ et montrons que $A^{n+1} = PD^{n+1}P^{-1}$.

$$\begin{aligned} A^{n+1} &= A^n \times A \\ &= PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= PD^nIDP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $A^n = PD^nP^{-1}$.

4) Puisque $-1 < 0,94 < 1$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,94^n = 0$. On en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \frac{1}{6}(v_0 + c_0) = \frac{250\,000}{6},$$

puis

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} (250\,000 - v_n) = 250\,000 - \frac{250\,000}{6} = \frac{5 \times 250\,000}{6}.$$

A long terme, environ un sixième de la population globale (c'est-à-dire un sixième de 250 000 personnes) habitera en ville et les cinq sixièmes restants habiteront à la campagne.