

EXERCICE 3 : corrigé

- 1) **VRAI**
- 2) **FAUX**
- 3) **VRAI**
- 4) **VRAI**

Justification 1. Soient A et B les points du plan d'affixes respectives i et -1 . Soit M un point du plan dont l'affixe est notée z .

$$|z - i| = |z + 1| \Leftrightarrow |z - z_A| = |z - z_B| \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow M \in \text{med}[AB].$$

L'ensemble cherché est la médiatrice du segment $[AB]$ qui est effectivement une droite. La proposition 1 est vraie.

Justification 2.

$$\begin{aligned} (1 + i\sqrt{3})^4 &= \left((1 + i\sqrt{3})^2 \right)^2 = (1 + 2i\sqrt{3} - 3)^2 = (-2 + 2i\sqrt{3})^2 \\ &= 2^2 (-1 + i\sqrt{3})^2 = 4 (1 - 2i\sqrt{3} - 3) = -8 - 8i\sqrt{3}. \end{aligned}$$

La partie imaginaire de $(1 + i\sqrt{3})^4$ est $-8\sqrt{3}$ et en particulier n'est pas nulle. On en déduit que $(1 + i\sqrt{3})^4$ n'est pas un nombre réel. La proposition 2 est fausse.

Justification 3.

1ère solution. Tout d'abord

$$\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{BG} = (\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FC}) \cdot \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{FC} \cdot \overrightarrow{BG}.$$

Puisque ABCDEFGH est un cube, la droite (EF) est perpendiculaire aux droites (FB) et (FG) qui sont deux droites sécantes du plan (BFG). On en déduit que la droite (EF) est orthogonale à toute droite du plan (BFG) et en particulier, la droite (EF) est orthogonale à la droite (BG). Par suite, $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BG} = 0$.

D'autre part, la face BCFG est un carré. Ses diagonales, à savoir [FC] et [BG] sont perpendiculaires. Par suite, $\overrightarrow{FC} \cdot \overrightarrow{BG} = 0$.

Mais alors,

$$\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{FC} \cdot \overrightarrow{BG} = 0 + 0 = 0.$$

Ceci montre que les droites (EC) et (BG) sont orthogonales. La proposition 3 est vraie.

2ème solution. On se place dans le repère $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$.

Le point E a pour coordonnées $(0, 0, 1)$ et le point C a pour coordonnées $(1, 1, 0)$. Donc le vecteur $\overrightarrow{EC}$ a pour coordonnées $(1, 1, -1)$.

Le point B a pour coordonnées $(1, 0, 0)$ et le point G a pour coordonnées $(1, 1, 1)$. Donc le vecteur $\overrightarrow{BG}$ a pour coordonnées $(0, 1, 1)$. Ensuite

$$\overrightarrow{EC} \cdot \overrightarrow{BG} = 1 \times 0 + 1 \times 1 + (-1) \times 1 = 0.$$

On retrouve ainsi le fait que les droites (EC) et (BG) sont orthogonales.

Justification 4. Soient $\mathcal{D}$ la droite passant par $S(1, -2, -2)$ et perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$ et Δ la droite de représen-

$$\text{tation paramétrique } \begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + t \\ z = 1 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

Un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ est le vecteur $\vec{n}(1, 1, 3)$. La droite $\mathcal{D}$ est donc la droite de vecteur directeur $\vec{n}(1, 1, 3)$ passant par le point $S(1, -2, -2)$.

D'autre part, la droite Δ admet pour vecteur directeur le vecteur de coordonnées $(1, 1, 3)$ et pour $t = -1$, on obtient

$$\begin{cases} x = 1 \\ y = -2 \\ z = -2 \end{cases} \text{ qui sont les coordonnées du point S. Donc } \Delta \text{ est aussi la droite de vecteur directeur } \vec{n}(1, 1, 3) \text{ passant par}$$

le point $S(1, -2, -2)$. Finalement, $\mathcal{D} = \Delta$. La proposition 4 est vraie.