France métropolitaine 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

1) a) $f(1)$ est l'ordonnée du point B à savoir 2.
$f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathscr{C}$ en B. Cette tangente est la droite (BC) de coefficient directeur 0. Donc, $f'(1) = 0$.

$$\boxed{f(1) = 2 \text{ et } f'(1) = 0.}$$

b) La fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $]0, +\infty[$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $]0, +\infty[$. De plus, pour tout réel strictement positif x,

$$f'(x) = \frac{b \times \frac{1}{x} \times x - (a + b\ln(x)) \times 1}{x^2} = \frac{b - a - b\ln(x)}{x^2} = \frac{(b - a) - b\ln(x)}{x^2}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x > 0,\ f'(x) = \frac{(b - a) - b\ln(x)}{x^2}.}$$

c) L'égalité $f(1) = 2$ s'écrit $\dfrac{a + b\ln(1)}{1} = 2$ ou encore $a = 2$.
L'égalité $f'(1) = 0$ s'écrit $\dfrac{(b - a) - b\ln(1)}{1^2} = 0$ ou encore $b - a = 0$ ou enfin $b = a = 2$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x > 0,\ f(x) = \frac{2 + 2\ln(x)}{x^2}.}$$

2) a) D'après la question b) appliquée avec $a = b = 2$, pour tout réel $x > 0$, on a

$$f'(x) = \frac{-2\ln(x)}{x^2}.$$

Pour tout réel $x > 0$, on a $\dfrac{2}{x^2} > 0$ et donc, pour tout réel $x > 0$, $f'(x)$ est du signe de $-\ln(x)$. Le signe de $\ln(x)$ étant connu, on en déduit que la fonction f' est strictement positive sur $]0, 1[$, strictement négative sur $]1, +\infty[$ et s'annule en 1.

b) Limite en 0. Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \dfrac{1}{x}(2+2\ln(x))$. On sait que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \ln(x) = -\infty$ et donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} (2+2\ln(x)) = -\infty$.
D'autre part, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$. En multipliant, on obtient

$$\boxed{\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} f(x) = -\infty.}$$

Limite en $+\infty$. Pour tout réel $x > 0$, $f(x) = \dfrac{2}{x} + 2 \times \dfrac{\ln(x)}{x}$. D'après un théorème de croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$. D'autre part, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{2}{x} = 0$. On en déduit que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{2}{x} + 2 \times \frac{\ln(x)}{x}\right) = 0 + 2 \times 0 = 0.$$

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0.}$$

c) Des deux questions précédentes, on déduit le tableau de variations de le fonction f.

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$+$	
f	‖ $-\infty$	↗	2	↘	0

3) a) La fonction f est continue et strictement croissante sur $]0,1]$. On sait alors que pour tout réel k de l'intervalle $\left]\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x), f(1)\right] =]-\infty, 2]$, il existe un réel x_0 et un seul de l'intervalle $]0,1]$ tel que $f(x_0) = k$. Comme le réel 1 appartient à $]-\infty, 2]$, il existe un réel de $]0,1]$ et un seul, noté α, tel que $f(\alpha) = 1$.

b) La calculatrice fournit $f(5) = 1,04\ldots$ et $f(6) = 0,9\ldots$. Donc, $f(5) > f(\beta) > f(6)$. Puisque la fonction f est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$, on en déduit que

$$\boxed{5 < \beta < 6.}$$

4) a)

	étape 1	étape 2	étape 3	étape 4	étape 5
a	0	0	$0,25$	$0,375$	$0,4375$
b	1	$0,5$	$0,5$	$0,5$	$0,5$
$b-a$	1	$0,5$	$0,25$	$0,125$	$0,0625$
m	$0,5$	$0,25$	$0,375$	$0,4375$	

b) Les valeurs finales de a et de b affichées par cet algorithme sont les bornes d'un encadrement de α d'amplitude au plus 10^{-1}. La méthode utilisée pour obtenir cet encadrement est la méthode par dichotomie.

c) Algorithme modifié.

Variables :	a, b et m sont des nombres réels
Initialisation :	Affecter à a la valeur 5
	Affecter à b la valeur 6
Traitement :	Tant que $b - a > 0,1$
	Affecter à m la valeur $\frac{1}{2}(a+b)$.
	Si $f(m) > 1$ alors affecter à a la valeur m.
	Sinon affecter à b la valeur m.
	Fin de Si.
	Fin de Tant que
Sortie :	Afficher a.
	Afficher b.

5) a) L'aire du rectangle OABC, exprimée en unités d'aires, est égale à $1 \times 2 = 2$. La moitié de cette aire est égale à 1.

Déterminons maintenant l'abscisse du point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ et de l'axe (Ox).

Soit x un réel strictement positif.

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{2(1+\ln(x))}{x} = 0 \Leftrightarrow 1 + \ln(x) = 0 \Leftrightarrow \ln(x) = -1 \Leftrightarrow x = e^{-1} \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}.$$

Enfin, la fonction f est croissante sur $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$ et, puisque $f\left(\frac{1}{e}\right) = 0$, on en déduit que la fonction f est positive sur l'intervalle $\left[\frac{1}{e}, 1\right]$. Par suite, l'aire, exprimée en unités d'aires, du domaine du plan délimité par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe (Ox) et la droite d'équation $x = 1$ est $\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,dx$.

Finalement, la courbe $\mathscr{C}$ paratge le rectangle OABC en deux domaines d'aires égales si et seulement si

$$\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,dx = 1.$$

b) Calculons $\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\,dx$. La fonction $x \mapsto \frac{1}{x} \times \ln(x)$ est de la forme $u' \times u$ avec pour tout $x > 0$, $u(x) = \ln(x)$.

On sait qu'une primitive de la fonction $u'u$ est la fonction $\frac{1}{2}u^2$ et donc

$$\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\ dx = \int_{\frac{1}{e}}^{1} \left(2 \times \frac{1}{x} + 2 \times \frac{1}{x} \times \ln(x)\right)\ dx = \left[2\ln(x) + 2\frac{(\ln(x))^2}{2}\right]_{\frac{1}{e}}^{1}$$

$$= \left(2\ln(1) + 2\frac{(\ln(1))^2}{2}\right) - \left(2\ln(1/e) + 2\frac{(\ln(1/e))^2}{2}\right)$$

$$= -\left(-2 + (-1)^2\right) = 1.$$

$$\boxed{\int_{\frac{1}{e}}^{1} f(x)\ dx = 1.}$$

On a ainsi démontré que la courbe $\mathscr{C}$ partage le rectangle $OABC$ en deux domaines d'aires égales.

