

Centres étrangers 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

Partie A - Algorithmique et conjectures

1) Algorithme corrigé.

Début de l'algorithme :

Lire n

Affecter à a la valeur 20

Affecter à b la valeur 10

Affecter à i la valeur 2013

Afficher i

Afficher a

Afficher b

Tant que $i < n$ faire

Affecter à c la valeur $(0,8a + 0,3b)$

Affecter à b la valeur $(0,2a + 0,7b)$

Affecter à a la valeur c

Affecter à i la valeur $i + 1$

Afficher i

Afficher a

Afficher b

Fin du Tant que

Fin de l'algorithme

2) Il semble que la suite (a_n) soit décroissante et converge vers 18 et que la suite (b_n) soit croissante et converge vers 12.

Partie B - Étude mathématique

1) Soit n un entier naturel.

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8a_n + 0,3b_n \\ 0,2a_n + 0,7b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = MU_n$$

où $M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix}$.

2) Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$: $M^n = \begin{pmatrix} 0,6 + 0,4 \times 0,5^n & 0,6 - 0,6 \times 0,5^n \\ 0,4 - 0,4 \times 0,5^n & 0,4 + 0,6 \times 0,5^n \end{pmatrix}$.

• $\begin{pmatrix} 0,6 + 0,4 \times 0,5^1 & 0,6 - 0,6 \times 0,5^1 \\ 0,4 - 0,4 \times 0,5^1 & 0,4 + 0,6 \times 0,5^1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} = M^1$. Donc, l'égalité à démontrer est vraie quand $n = 1$.

• Soit $n \geq 1$. Supposons que $M^n = \begin{pmatrix} 0,6 + 0,4 \times 0,5^n & 0,6 - 0,6 \times 0,5^n \\ 0,4 - 0,4 \times 0,5^n & 0,4 + 0,6 \times 0,5^n \end{pmatrix}$ et montrons que

$$M^{n+1} = \begin{pmatrix} 0,6 + 0,4 \times 0,5^{n+1} & 0,6 - 0,6 \times 0,5^{n+1} \\ 0,4 - 0,4 \times 0,5^{n+1} & 0,4 + 0,6 \times 0,5^{n+1} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M \times M^n \\ &= \begin{pmatrix} 0,8 & 0,3 \\ 0,2 & 0,7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,6 + 0,4 \times 0,5^n & 0,6 - 0,6 \times 0,5^n \\ 0,4 - 0,4 \times 0,5^n & 0,4 + 0,6 \times 0,5^n \end{pmatrix} \text{ (par hypothèse de récurrence)} \\ &= \begin{pmatrix} 0,8(0,6 + 0,4 \times 0,5^n) + 0,3(0,4 - 0,4 \times 0,5^n) & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (0,8 \times 0,6 + 0,3 \times 0,4) + (0,8 \times 0,4 - 0,3 \times 0,4) \times 0,5^n & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,6 + 0,4 \times (0,8 - 0,3) \times 0,5^n & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 + 0,4 \times 0,5 \times 0,5^n & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,6 + 0,4 \times 0,5^{n+1} & \bullet \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix} \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel $n \geq 1$: $M^n = \begin{pmatrix} 0,6 + 0,4 \times 0,5^n & 0,6 - 0,6 \times 0,5^n \\ 0,4 - 0,4 \times 0,5^n & 0,4 + 0,6 \times 0,5^n \end{pmatrix}$.

3) Soit $n \geq 1$.

$$\begin{pmatrix} a_n \\ \bullet \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,6 + 0,4 \times 0,5^n & 0,6 - 0,6 \times 0,5^n \\ \bullet & \bullet \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \end{pmatrix} \\ = \begin{pmatrix} 20(0,6 + 0,4 \times 0,5^n) + 10(0,6 - 0,6 \times 0,5^n) \\ \bullet \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 + 2 \times 0,5^n \\ \bullet \end{pmatrix}$$

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, $a_n = 18 + 2 \times 0,5^n$.

4) Puisque $-1 < 0,5 < 1$, $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,5^n = 0$ et donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 18 + 2 \times 0 = 18$.

Au bout d'un grand nombre d'années, le nombre d'oiseaux sur l'île A va se stabiliser à environ 18 millions d'oiseaux.