Centres étrangers 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (6 points) (commun à tous les candidats)

Un industriel fabrique des vannes électroniques destinées à des circuits hydrauliques. Les quatre parties A, B, C, D sont indépendantes.

Partie A

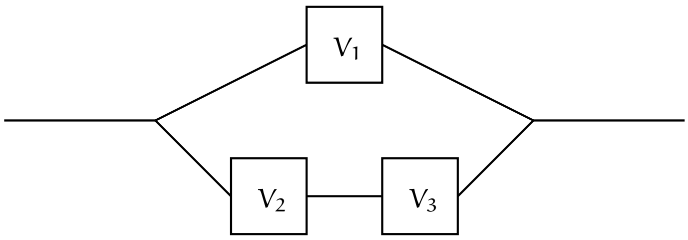
La durée de vie d'une vanne, exprimée en heures, est une variable aléatoire T qui suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,000\,2$.

1) Quelle est la durée de vie moyenne d'une vanne ?

2) Calculer la probabilité, à $0,001$ près, que la durée de vie d'une vanne soit supérieure à $6\,000$ heures.

Partie B

Avec trois vannes identiques V_1, V_2 et V_3, on fabrique le circuit hydraulique ci-contre. Le circuit est en état de marche si V_1 est en état de marche ou si V_2 et V_3 le sont simultanément.



On assimile à une expérience aléatoire le fait que chaque vanne est ou n'est pas en état de marche après $6\,000$ heures. On note :

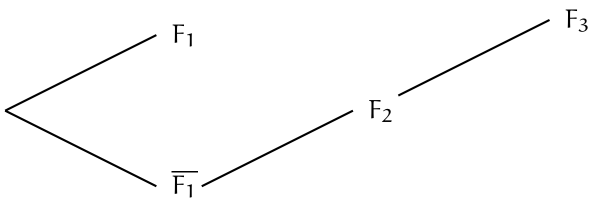
- F_1 l'événement : « la vanne V_1 est en état de marche après $6\,000$ heures ».
- F_2 l'événement : « la vanne V_2 est en état de marche après $6\,000$ heures »
- F_3 l'événement : « la vanne V_3 est en état de marche après $6\,000$ heures ».
- E : l'événement : « le circuit est en état de marche après $6\,000$ heures ».

On admet que les événements F_1, F_2 et F_3 sont deux à deux indépendants et ont chacun une probabilité égale à $0,3$.

1) L'arbre probabiliste ci-contre représente une partie de la situation. Reproduire cet arbre et placer les probabilités sur les branches.

2) Démontrer que $P(E) = 0,363$.

3) Sachant que le circuit est en état de marche après $6\,000$ heures, calculer la probabilité que la vanne V_1 soit en état de marche à ce moment là. Arrondir au millième.



Partie C

L'industriel affirme que seulement 2% des vannes qu'il fabrique sont défectueuses. On suppose que cette affirmation est vraie, et l'on note F la variable aléatoire égale à la fréquence de vannes défectueuses dans un échantillon aléatoire de 400 vannes prises dans la production totale.

1) Déterminer l'intervalle I de fluctuation asymptotique au seuil de 95% de la variable F.

2) On choisit 400 vannes au hasard dans la production. On assimile ce choix à un tirage aléatoire de 400 vannes, avec remise, dans la production.
Parmi ces 400 vannes, 10 sont défectueuses.
Au vu de ce résultat peut-on remettre en cause, au seuil de 95%, l'affirmation de l'industriel ?

Partie D

Dans cette partie, les probabilités calculées seront arrondies au millième.

L'industriel commercialise ses vannes auprès de nombreux clients. La demande mensuelle est une variable aléatoire D qui suit la loi normale d'espérance $\mu = 800$ et d'écart-type $\sigma = 40$.

1) Déterminer $P(760 \leqslant D \leqslant 840)$.

2) Déterminer $P(D \leqslant 880)$.

3) L'industriel pense que s'il constitue un stock mensuel de 880 vannes, il n'aura pas plus de 1% de chance d'être en rupture de stock. A-t-il raison ?

