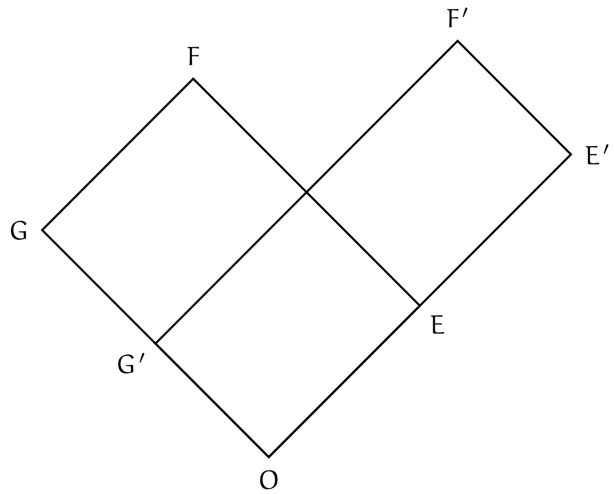
Asie 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

Un logiciel permet de transformer un élément rectangulaire d'une photographie.
Ainsi, le rectangle initial OEFG est transformé en un rectangle $\mathsf{OE'F'G'}$, appelé image de OEFG.

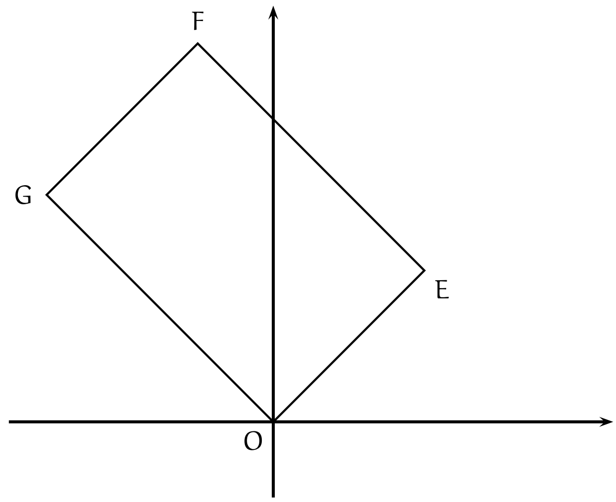


L'objet de cet exercice est d'étudier le rectangle obtenu après plusieurs transformations successives.

Partie A

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.
Les points E, F et G ont pour coordonnées respectives $(2;2)$, $(-1;5)$ et $(-3;3)$.
La transformation du logiciel associe à tout point $M(x;y)$ du plan le point $M'(x';y')$, image du point M tel que :

$$\left\{\begin{array}{l} x' = \dfrac{5}{4}x + \dfrac{3}{4}y \\ y' = \dfrac{3}{4}x + \dfrac{5}{4}y \end{array}\right.$$



1) a) Calculer les coordonnées des points E', F' et G', images des points E, F et G par cette transformation.

b) Comparer les longueurs OE et OE' d'une part, OG et OG' d'autre part.

2) Donner la matrice carrée d'ordre 2, notée A, telle que : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

Partie B

Dans cette partie, on étudie les coordonnées des images successives du sommet F du rectangle $OEFG$ lorsqu'on applique plusieurs fois la transformation du logiciel.

1) On considère l'algorithme suivant destiné à afficher les coordonnées de ces images successives.
Une erreur a été commise.
Modifier cet algorithme pour qu'il permette d'afficher ces coordonnées.

Entrée :	Saisir un entier naturel non nul N
Initialisation :	Affecter à x la valeur -1 Affecter à y la valeur 5

Traitement :	Entrer la valeur de N
	POUR i allant de 1 à N
	    Affecter à a la valeur $\frac{5}{4}x + \frac{3}{4}y$
	    Affecter à b la valeur $\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}y$
	    Affecter à x la valeur a
	    Affecter à y la valeur b
	Fin POUR

Sortie :	Afficher x Afficher y

2) On a obtenu le tableau suivant :

i	1	2	3	4	5	10	15
x	$2,5$	$7,25$	$15,625$	$31,812\,5$	$63,906\,3$	$2\,047,997\,1$	$65\,535,999\,9$
y	$5,5$	$8,75$	$16,375$	$32,187\,5$	$64,093\,8$	$2\,048,002\,9$	$65\,536,000\,1$

Conjecturer le comportement de la suite des images successives du point F.

Partie C

Dans cette partie, on étudie les coordonnées des images successives du sommet E du rectangle $OEFG$.
On définit la suite des points $E_n\,(x_n ; y_n)$ du plan par $E_0 = E$ et la relation de récurrence :

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix},$$

où $(x_{n+1} ; y_{n+1})$ désignent les coordonnées du point E_{n+1}. Ainsi $x_0 = 2$ et $y_0 = 2$.

1) On admet que, pour tout entier $n \geqslant 1$, la matrice A^n peut s'écrire sous la forme : $\begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix}$.
Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a :

$$\alpha_n = 2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}} \text{ et } \beta_n = 2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}}.$$

2) a) Démontrer que, pour tout entier naturel n, le point E_n est situé sur la droite d'équation $y = x$.
On pourra utiliser que, pour tout entier naturel n, les coordonnées $(x_n ; y_n)$ du point E_n vérifient :

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

b) Démontrer que la longueur OE_n tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

