

EXERCICE 4

Partie A

$$1) a) \bullet \begin{cases} x_{E'} = \frac{5}{4}x_E + \frac{3}{4}y_E = \frac{5}{4} \times 2 + \frac{3}{4} \times 2 = 4 \\ y_{E'} = \frac{3}{4}x_E + \frac{5}{4}y_E = \frac{3}{4} \times 2 + \frac{5}{4} \times 2 = 4 \end{cases} \text{ . Donc les coordonnées de } E' \text{ sont } (4, 4).$$

$$\bullet \begin{cases} x_{F'} = \frac{5}{4}x_F + \frac{3}{4}y_F = \frac{5}{4} \times (-1) + \frac{3}{4} \times 5 = \frac{5}{2} \\ y_{F'} = \frac{3}{4}x_F + \frac{5}{4}y_F = \frac{3}{4} \times (-1) + \frac{5}{4} \times 5 = \frac{11}{2} \end{cases} \text{ . Donc les coordonnées de } F' \text{ sont } \left(\frac{5}{2}, \frac{11}{2}\right).$$

$$\bullet \begin{cases} x_{G'} = \frac{5}{4}x_G + \frac{3}{4}y_G = \frac{5}{4} \times (-3) + \frac{3}{4} \times 3 = -\frac{3}{2} \\ y_{G'} = \frac{3}{4}x_G + \frac{5}{4}y_G = \frac{3}{4} \times (-3) + \frac{5}{4} \times 3 = \frac{3}{2} \end{cases} \text{ . Donc les coordonnées de } G' \text{ sont } \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right).$$

b) $OE = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{2 \times 2^2} = 2\sqrt{2}$ et $OE' = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{2 \times 4^2} = 4\sqrt{2}$. Donc $OE' = 2OE$.

$OG = \sqrt{(-3)^2 + 3^2} = \sqrt{2 \times 3^2} = 3\sqrt{2}$ et $OG' = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$. Donc $OG' = \frac{OG}{2}$.

2) Pour tous réels x et y ,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4}x + \frac{3}{4}y \\ \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Donc $A = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$.

Partie B

1) Algorithme modifié.

Entrée :	Saisir un entier naturel non nul N
Initialisation :	Affecter à x la valeur -1 Affecter à y la valeur 5
Traitement :	Entrer la valeur de N POUR i allant de 1 à N Affecter à a la valeur $\frac{5}{4}x + \frac{3}{4}y$ Affecter à b la valeur $\frac{3}{4}x + \frac{5}{4}y$ Affecter à x la valeur a Affecter à y la valeur b Afficher x Afficher y Fin POUR

2) Il semblerait que les deux suites de coordonnées des images successives du point F tendent vers $+\infty$.

Partie C

1) Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $\alpha_n = 2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}}$ et $\beta_n = 2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}}$.

- D'après la question 2) de la partie A, on a $A = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix}$ ou encore $\alpha_1 = \frac{5}{4}$ et $\beta_1 = \frac{3}{4}$.

Donc, $2^{1-1} + \frac{1}{2^{1+1}} = 1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4} = \alpha_1$ et $2^{1-1} - \frac{1}{2^{1+1}} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} = \beta_1$. Les égalités à démontrer sont vraies quand $n = 1$.

- Soit $n \geq 1$. Supposons que $\alpha_n = 2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}}$ et $\beta_n = 2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}}$ et montrons que $\alpha_{n+1} = 2^n + \frac{1}{2^{n+2}}$ et $\beta_{n+1} = 2^n - \frac{1}{2^{n+2}}$.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha_{n+1} & \beta_{n+1} \\ \beta_{n+1} & \alpha_{n+1} \end{pmatrix} &= A^{n+1} = A \times A^n = \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \beta_n & \alpha_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{5}{4} & \frac{3}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{5}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}} & 2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}} \\ 2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}} & 2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}} \end{pmatrix} \quad (\text{par hypothèse de récurrence}) \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1} &= \frac{5}{4} \left(2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}} \right) + \frac{3}{4} \left(2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}} \right) = \left(\frac{5}{4} + \frac{3}{4} \right) \times 2^{n-1} + \left(\frac{5}{4} - \frac{3}{4} \right) \times \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= 2 \times 2^{n-1} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n+1}} = 2^n + \frac{1}{2^{n+2}} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \beta_{n+1} &= \frac{3}{4} \left(2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}} \right) + \frac{5}{4} \left(2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}} \right) = \left(\frac{3}{4} + \frac{5}{4} \right) \times 2^{n-1} + \left(\frac{3}{4} - \frac{5}{4} \right) \times \frac{1}{2^{n+1}} \\ &= 2 \times 2^{n-1} - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2^{n+1}} = 2^n - \frac{1}{2^{n+2}}. \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que, pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a $\alpha_n = 2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}}$ et $\beta_n = 2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}}$.

2) a) Soit n un entier naturel non nul. D'après la question précédente,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} &= A^n \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}} & 2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}} \\ 2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}} & 2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \left(2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}} \right) + 2 \left(2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}} \right) \\ 2 \left(2^{n-1} - \frac{1}{2^{n+1}} \right) + 2 \left(2^{n-1} + \frac{1}{2^{n+1}} \right) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2^n + 2^n \\ 2^n + 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} \\ 2^{n+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ainsi, l'abscisse et l'ordonnée de E_n sont égales à 2^{n+1} , ce qui reste vrai quand $n = 0$. En particulier, pour tout entier naturel n , le point E_n est sur la droite d'équation $y = x$.

b) Soit n un entier naturel.

$$OE_n = \sqrt{x_n^2 + y_n^2} = \sqrt{2 \times x_n^2} = x_n \sqrt{2} = 2^{n+1} \sqrt{2} = 2\sqrt{2} \times 2^n.$$

Puisque $2 > 1$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$. En multipliant par $2\sqrt{2}$, on obtient $\lim_{n \rightarrow +\infty} OE_n = +\infty$.