Antilles Guyane 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

On définit les suite (u_n) et (v_n) sur l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels par :

$$u_0 = 0,\ v_0 = 1 \text{ et } \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{u_n + v_n}{2} \\ v_{n+1} = \dfrac{u_n + 2v_n}{3} \end{cases}.$$

Le but de cet exercice est d'étudier la convergence des suites (u_n) et (v_n).

1) Calculer u_1 et v_1.

2) On considère l'algorithme suivant :

Variables :	u, v et w des nombres réels N et k des nombres entiers
Initialisation :	u prend la valeur 0 v prend la valeur 1

Début de l'algorithme :	Entrer la valeur de N
	Pour k variant de 1 à N
	    w prend la valeur u
	    u prend la valeur $\dfrac{w+v}{2}$
	    v prend la valeur $\dfrac{w+2v}{3}$
	Fin du Pour
	Afficher u
	Afficher v

Fin de l'algorithme	

a) On exécute cet algorithme en saisissant $N = 2$. Recopier et compléter le tableau ci-dessous contenant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme.

k	w	u	v
1			
2			

b) Pour un nombre N donné, à quoi correspondent les valeurs affichées par l'algorithme par rapport à la situation étudiée dans cet exercice ?

3) Pour tout entier naturel n, on définit le vecteur colonne X_n par $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$ et la matrice A par $A = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{3} & \dfrac{2}{3} \end{pmatrix}$.

a) Vérifier que, pour tout entier naturel n, $X_{n+1} = AX_n$.

b) Démontrer par récurrence que $X_n = A^n X_0$ pour tout entier naturel n.

4) On définit les matrices P, P' et B par $P = \begin{pmatrix} \dfrac{4}{5} & \dfrac{6}{5} \\ -\dfrac{6}{5} & \dfrac{6}{5} \end{pmatrix}$, $P' = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{3} \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{6} \end{pmatrix}$.

a) Calculer le produit PP'.
On admet que $P'BP = A$.
Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $A^n = P'B^nP$.

b) On admet que pour tout entier naturel n, $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(\dfrac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$.

En déduire l'expression de la matrice A^n en fonction de n.

5) a) Montrer que $X_n = \begin{pmatrix} \dfrac{3}{5} - \dfrac{3}{5}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n \\ \dfrac{3}{5} + \dfrac{2}{5}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n \end{pmatrix}$.

b) Déterminer alors les limites des suites (u_n) et (v_n).

