Antilles Guyane 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

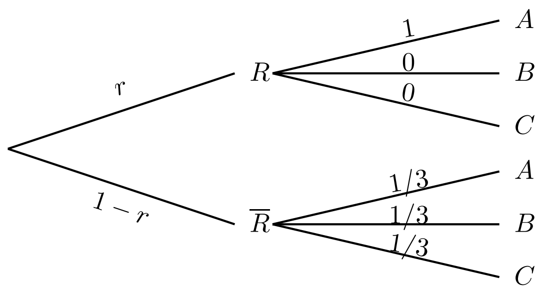
Partie A

$$
\begin{aligned}
f \in \left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}, p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right] &\Leftrightarrow p-\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant f \leqslant p+\frac{1}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow p-\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant f \text{ et } f \leqslant p+\frac{1}{\sqrt{n}}\\
&\Leftrightarrow p \leqslant f+\frac{1}{\sqrt{n}} \text{ et } f-\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant p \Leftrightarrow f-\frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant p \leqslant f+\frac{1}{\sqrt{n}}\\
&\Leftrightarrow p \in \left[f-\frac{1}{\sqrt{n}}, f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right].
\end{aligned}
$$

Ainsi, les événements $f \in \left[p-\frac{1}{\sqrt{n}}, p+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ et $p \in \left[f-\frac{1}{\sqrt{n}}, f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ se produisent simultanément. Ils ont donc la même probabilité et en particulier, pour n grand, l'intervalle $\left[f-\frac{1}{\sqrt{n}}, f+\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$ contient p avec une probabilité au moins égale à $0,95$.

Partie B

1) a) Représentons le situation par un arbre de probabilités.



b) D'après la formule des probabilités totales

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P\left(R \cap A\right) + P\left(\overline{R} \cap A\right) = P(R) \times P_R(A) + P\left(\overline{R}\right) \times P_{\overline{R}}(A)\\
&= r \times 1 + (1-r) \times \frac{1}{3} = \frac{3r+1-r}{3} = \frac{1}{3}(1+2r).
\end{aligned}
$$

$$\boxed{P(A) = \frac{1}{3}(1+2r).}$$

c) La probabilité demandée est $P_A(R)$.

$$P_A(R) = \frac{P\left(A \cap R\right)}{p(A)} = \frac{P(R) \times P_R\left(A\right)}{p(A)} = \frac{r \times 1}{\frac{1}{3}(1+2r)} = \frac{3r}{1+2r}.$$

$$\boxed{P_A(R) = \frac{3r}{1+2r}.}$$

2) a) X suit une loi binomiale. En effet,

- 400 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues à savoir « l'étudiant donne la bonne réponse » avec une probabilité $p = P(A) = \frac{1}{3}(1+2r)$ d'après la question 1)b) et « l'étudiant ne donne pas la bonne réponse » avec une probabilité $1-p = 1-\frac{1}{3}(1+2r) = \frac{2}{3}(1-r)$.

Donc, X suit une loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = \frac{1}{3}(1+2r)$.

On sait alors que pour tout entier naturel k tel que $0 \leqslant k \leqslant 400$,

$$P(X = k) = \binom{400}{k} \left(\frac{1}{3}(1 + 2r)\right)^k \left(\frac{2}{3}(1 - r)\right)^{400-k}.$$

b) Dans cette question, $n = 400$ et $f = \dfrac{240}{400} = 0,6$. On note que $n \geqslant 30$, $nf \geqslant 5$ et $n(1 - f) \geqslant 5$.
Un intervalle de confiance au seuil de 95% de l'estimation de p est

$$\left[0,6 - \frac{1}{\sqrt{400}}; 0,6 - \frac{1}{\sqrt{400}}\right] = [0,55; 0,65].$$

Ainsi, on a au moins 95% de chances que $0,55 \leqslant p \leqslant 0,65$. Or,

$$\begin{aligned} 0,55 \leqslant p \leqslant 0,65 &\Leftrightarrow 0,55 \leqslant \frac{1}{3}(1 + 2r) \leqslant 0,65 \Leftrightarrow 1,65 \leqslant 1 + 2r \leqslant 1,95 \Leftrightarrow 0,65 \leqslant 2r \leqslant 0,95 \\ &\Leftrightarrow 0,325 \leqslant r \leqslant 0,475. \end{aligned}$$

Un intervalle de confiance de r au seuil de 95% est $[0,325; 0,475]$.

c) i) X suit une loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = \dfrac{1}{3}(1 + 2 \times 0,4) = 0,6$. L'espérance de X est

$$E(X) = np = 400 \times 0,6 = 240$$

et la variance de X est

$$V(X) = np(1 - p) = 400 \times 0,6 \times 0,4 = 96.$$

L'énoncé nous dit alors que l'on approche la loi de X par la loi normale de paramètres $\mu = 240$ et $\sigma^2 = 96$ ou encore $\sigma = \sqrt{96} = 9,7$ à 10^{-1} près.

ii) On lit dans la case B17 du tableau fourni en annexe $P(X \leqslant 250) = 0,846$ et en particulier $P(X \leqslant 250) = 0,84$ à 10^{-2} près.

