Amérique du sud. Novembre 2013. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (5 points) (Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

1) Soit n un entier naturel. D'après la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned}a_{n+1} &= P(a_{n+1}) = P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) + P(C_n \cap A_{n+1})\\ &= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(A_{n+1})\\ &= a_n \times 0 + b_n \times \frac{1}{2} + c_n \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n.\end{aligned}$$

2) Soit n un entier naturel.

$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \\ \frac{1}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \\ \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = MU_n$$

où $M = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$.

Montrons alors par récurrence que, pour tout entier naturel n, $U_n = M^n U_0$.

- $M^0 U_0 = IU_0 = U_0$ et donc l'égalité à démontrer est vraie quand $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$. Supposons que $U_n = M^n U_0$ et montrons que $U_{n+1} = M^{n+1} U_0$.

$$\begin{aligned}U_{n+1} &= M \times U_n\\ &= M \times M^n U_0 \text{ (par hypothèse de récurrence)}\\ &= M^{n+1} \times U_0.\end{aligned}$$

On a montré par récurrence que, pour tout entier naturel n, $U_n = M^n U_0$.

3) Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ un vecteur colonne.

$$MU = U \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2}y + \frac{1}{2}z = x \\ \frac{1}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z = y \\ \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}y + \frac{1}{4}z = z \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} 2x - y - z = 0 \\ x - 3y + z = 0 \\ 3x + y - 3z = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = 2x - y \\ x - 3y + (2x - y) = 0 \\ 3x + y - 3(2x - y) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} z = 2x - y \\ 3x - 4y = 0 \\ -3x + 4y = 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \frac{3}{4}x \\ z = 2x - \frac{3}{4}x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \frac{3}{4}x \\ z = \frac{5}{4}x \end{array}\right. .$$

Si de plus $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un vecteur colonne tel que $x + y + z = 1$, alors

$$MU = U \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \frac{3}{4}x \\ z = \frac{5}{4}x \\ x + y + z = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} y = \frac{3}{4}x \\ z = \frac{5}{4}x \\ x + \frac{3}{4}x + \frac{5}{4}x = 1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{4} \\ z = \frac{5}{12} \end{array}\right. .$$

Ainsi, il existe une et une seule matrice colonne $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ telle que : $x+y+z = 1$ et $MU = U$ à savoir $U = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{5}{12} \end{pmatrix}$.

4) Soit n un entier naturel. En tenant compte de $a_0 + b_0 + c_0 = 1$, on obtient

$$U_n = M^n U_0 = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} + \dfrac{\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n \times 2}{3} & \dfrac{1}{3} + \dfrac{\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n}{-3} & \dfrac{1}{3} + \dfrac{\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n}{-3} \\ \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{4} & \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{5}{12} + \dfrac{\left(-\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n\right) \times 2}{3} & \dfrac{5}{12} + \dfrac{-\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n}{-3} & \dfrac{5}{12} + \dfrac{-\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n}{-3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n \times 2}{3}\right) a_0 + \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n}{-3}\right) b_0 + \left(\dfrac{1}{3} + \dfrac{\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n}{-3}\right) c_0 \\ \dfrac{1}{4}a_0 + \dfrac{1}{4}b_0 + \dfrac{1}{4}c_0 \\ \left(\dfrac{5}{12} + \dfrac{\left(-\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n\right) \times 2}{3}\right) a_0 + \left(\dfrac{5}{12} + \dfrac{-\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n}{-3}\right) b_0 + \left(\dfrac{5}{12} + \dfrac{-\left(\dfrac{-1}{2}\right)^n}{-3}\right) c_0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} + \dfrac{2a_0}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n - \dfrac{b_0}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n - \dfrac{c_0}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \\ \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{5}{12} - \dfrac{2a_0}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n + \dfrac{b_0}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n + \dfrac{c_0}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} + \left(\dfrac{2a_0}{3} - \dfrac{b_0 + c_0}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \\ \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{5}{12} + \left(-\dfrac{2a_0}{3} + \dfrac{b_0 + c_0}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} + \left(\dfrac{2a_0}{3} - \dfrac{1 - a_0}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \\ \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{5}{12} + \left(-\dfrac{2a_0}{3} + \dfrac{1 - a_0}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{3} + \left(a_0 - \dfrac{1}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \\ \dfrac{1}{4} \\ \dfrac{5}{12} - \left(a_0 - \dfrac{1}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ a_n = \dfrac{1}{3} + \left(a_0 - \dfrac{1}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n,\ b_n = \dfrac{1}{4} \text{ et } c_n = \dfrac{5}{12} - \left(a_0 - \dfrac{1}{3}\right)\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n.}$$

Puisque $-1 < -\dfrac{1}{2} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(-\dfrac{1}{2}\right)^n = 0$ et donc

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} a_n = \dfrac{1}{3},\ \lim_{n \to +\infty} b_n = \dfrac{1}{4} \text{ et } \lim_{n \to +\infty} c_n = \dfrac{5}{12}.}$$

5) Au bout d'un grand nombre de navigations, les fréquences de connexion aux trois pages web tendent à se stabiliser autour de $\dfrac{1}{3}$ pour la page n° 1, $\dfrac{1}{4}$ pour la page n° 2 et $\dfrac{5}{12}$ pour la page n° 3 ou encore environ 33% pour la page n° 1, 25% pour la page n° 2 et 42% pour la page n° 3.

