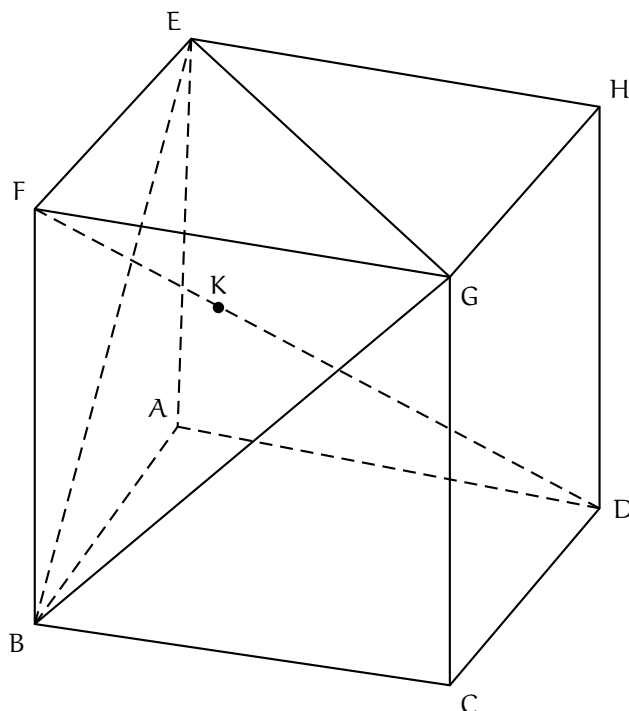


EXERCICE 2 (4 points) (commun à tous les candidats)



1) Le point D a pour coordonnées $(0, 1, 0)$ et le point F a pour coordonnées $(1, 0, 1)$. La droite FD est la droite passant par D(1,0,1) et de vecteur directeur $\overrightarrow{DF}(1, -1, 1)$. Une représentation paramétrique de la droite (FD) est

$$\begin{cases} x = 1 + t \\ y = -t \\ z = 1 + t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

2) Les points B, G et E ne sont pas alignés ou encore les vecteurs $\overrightarrow{BG}$ et $\overrightarrow{BE}$ ne sont pas colinéaires. Donc, les points B, G et E définissent un unique plan à savoir le plan (BGE).

Le point B a pour coordonnées $(1, 0, 0)$, le point G a pour coordonnées $(1, 1, 1)$ et le point E a pour coordonnées $(0, 0, 1)$. Le vecteur $\overrightarrow{BG}$ a pour coordonnées $(0, 1, 1)$ et le vecteur $\overrightarrow{BE}$ a pour coordonnées $(-1, 0, 1)$.

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{BG} = 1 \times 0 + (-1) \times 1 + 1 \times 1 = 0 - 1 + 1 = 0$$

et

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{BE} = 1 \times (-1) + (-1) \times 0 + 1 \times 1 = -1 + 0 + 1 = 0.$$

Le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (BGE) et donc le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (BGE).

Le plan (BGE) est le plan passant par B(1,0,0) et de vecteur normal $\vec{n}(1, -1, 1)$. Une équation cartésienne du plan (BGE) est $1 \times (x - 1) - 1 \times (y - 0) + 1 \times (z - 0) = 0$ ou encore $x - y + z = 1$.

Une équation cartésienne du plan (BGE) est $x - y + z = 1$.

3) Le vecteur $\overrightarrow{DF}$ a pour coordonnées $(1, -1, 1)$ et donc $\overrightarrow{DF} = \vec{n}$. Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{DF}$ est un vecteur normal au plan (BGE) et donc la droite (FD) est perpendiculaire au plan (BGE).

Soit $M(1 + t, -t, 1 + t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite (FD).

$$M \in (\text{BGE}) \Leftrightarrow (1 + t) - (-t) + (1 + t) = 1 \Leftrightarrow 3t = -1 \Leftrightarrow t = -\frac{1}{3}.$$

Quand $t = -\frac{1}{3}$, on obtient le point K de coordonnées $K\left(\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$.

4) La diagonale d'un carré de côté a , $a \in \mathbb{R}$, a une longueur égale à $a\sqrt{2}$ d'après le théorème de PYTHAGORE. Donc, $BE = BG = EG = \sqrt{2}$. Le triangle BEG est équilatéral.

La hauteur d'un triangle équilatéral de côté a , $a \in \mathbb{R}$ est égale à $a \frac{\sqrt{3}}{2}$ d'après le théorème de PYTHAGORE. L'aire du triangle BEG est donc

$$\frac{1}{2} \times \sqrt{2} \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \times \sqrt{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

L'aire du triangle BEG est égale à $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

5) D'après les questions précédentes, la droite (KD) est la hauteur issue de D du tétraèdre BEGD.

$$DK = \sqrt{\left(\frac{2}{3} - 0\right)^2 + \left(\frac{1}{3} - 1\right)^2 + \left(\frac{2}{3} - 0\right)^2} = \sqrt{\frac{12}{9}} = \sqrt{\frac{4}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Le volume du tétraèdre BEGD est $\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h$ où $\mathcal{B}$ est l'aire du triangle BEG à savoir $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et $h = DK = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

Donc

$$\mathcal{V} = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}.$$

Le volume du tétraèdre BEGD est égal à $\frac{1}{3}$.