Rochambeau 2012. Enseignement de spécialité

EXERCICE 4 (5 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
Soit S la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = 5iz + 6i + 4.$$

Partie A

On note x et x', y et y' les parties réelles et imaginaires respectives de z et z'. Démontrer que

$$\left\{\begin{array}{l} x' = -5y + 4 \\ y' = 5x + 6 \end{array}\right. .$$

Partie B

Dans cette partie, on se place dans le cas où les coordonnées x et y du point M sont des entiers relatifs tels que

$$-3 \leqslant x \leqslant 5 \text{ et } -3 \leqslant y \leqslant 5.$$

On note (E) l'ensemble de ces points M.
On rappelle que les coordonnées (x', y') du point M', image du point M par la transformation S, sont $x' = -5y+4$ et $y' = 5x + 6$.

1) a) Déterminer l'ensemble des couples (a, b) d'entiers relatifs tels que $4a + 3b = 5$.

b) En déduire l'ensemble des points M de (E) de coordonnées (x, y) tels que $-3x' + 4y' = 37$.

2) Soient M un point de l'ensemble (E) et M' son image par la transformation S.

a) Démontrer que $x' + y'$ est un multiple de 5.

b) Démontrer que $x' - y'$ et $x' + y'$ sont congrus modulo 2.
En déduire que si $x'^2 - y'^2$ est un multiple de 2 alors $x' - y'$ et $x' + y'$ le sont également.

c) Déterminer l'ensemble des points M de (E) tels que : $x'^2 - y'^2 = 20$.

