Rochambeau 2012. Enseignement de spécialité

EXERCICE 4

Partie A

Posons $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$ où x, y, x' et y' sont quatre réels.

$$z' = 5iz + 6i + 4 = 5i(x + iy) + 6i + 4 = 5ix - 5y + 6i + 4 = (-5y + 4) + i(5x + 6).$$

Par identification des parties réelles et imaginaires, on obtient

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} x' = -5y + 4 \\ y' = 5x + 6 \end{array}\right. .}$$

Partie B

1) a) Notons $(\mathscr{E})$ l'équation considérée. Puisque $4 \times 2 + 3 \times (-1) = 8 - 3 = 5$, le couple $(a_0, b_0) = (2, -1)$ est une solution particulière de l'équation $(\mathscr{E})$.

Soient a et b deux entiers relatifs.

$$4a + 3b = 5 \Leftrightarrow 4a + 3b = 4a_0 + 3b_0 \Leftrightarrow 4(a - a_0) = 3(b_0 - b). \quad (*)$$

Si le couple (a, b) est une solution de $(\mathscr{E})$, alors l'entier 3 divise $3(b_0 - b) = 4(a - a_0)$.
Puisque les entiers 3 et $4 = 2^2$ sont premiers entre eux (car sans facteur premier commun), le théorème de Gauss permet d'affirmer que l'entier 3 divise $a - a_0$.
De même, l'entier 4 divise $b_0 - b$. Par suite, il existe deux entiers relatif k et k' tels que $a - a_0 = 3k$ ou encore $a = a_0 + 3k$ et $b_0 - b = 4k'$ ou encore $b = b_0 - 4k'$.

Réciproquement, soient k et k' deux entiers relatifs puis $a = a_0 + 3k$ et $b = b_0 - 4k'$.

$$4a + 3b = 5 \Leftrightarrow 4(a_0 + 3k) + 3(b_0 - 4k') = 5 \Leftrightarrow 4a_0 + 3b_0 + 12(k - k') = 5 \Leftrightarrow 12(k - k') = 0 \Leftrightarrow k = k'.$$

$\boxed{\text{Les couples } (a, b) \text{ d'entiers relatifs tels que } 4a + 3b = 5 \text{ sont les couples de la forme } (2 + 3k, -1 - 4k),\ k \in \mathbb{Z}.}$

b) Soient x' et y' deux entiers relatifs.

$$\begin{aligned} -3x' + 4y' = 37 &\Leftrightarrow -3(-5y + 4) + 4(5x + 6) = 37 \Leftrightarrow 5(4x + 3y) = 37 + 12 - 24 \\ &\Leftrightarrow 5(4x + 3y) = 25 \Leftrightarrow 4x + 3y = 5 \\ &\Leftrightarrow \text{il existe un entier relatif } k \text{ tel que } x = 2 + 3k \text{ et } y = -1 - 4k. \end{aligned}$$

Soit alors k un entier relatif.

$$-3 \leqslant 2 + 3k \leqslant 5 \Leftrightarrow -5 \leqslant 3k \leqslant 3 \Leftrightarrow -\frac{5}{3} \leqslant k \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant k \leqslant 1,$$

et

$$-3 \leqslant -1 - 4k \leqslant 5 \Leftrightarrow -2 \leqslant -4k \leqslant 6 \Leftrightarrow -\frac{6}{4} \leqslant k \leqslant \frac{2}{4} \Leftrightarrow -1 \leqslant k \leqslant 0.$$

En résumé, le point M de coordonnées $(2 + 3k, -1 - 4k)$ est un point de (E) si et seulement si $k = -1$ ou $k = 0$.
Si $k = -1$, on obtient le point de coordonnées $(-1, 3)$ et si $k = 0$, on obtient le point de coordonnées $(2, -1)$.

$\boxed{\text{Il existe exactement deux points de } (E) \text{ tel que } -3x' + 4y' = 37 \text{ : les points de coordonnées } (-1, 3) \text{ et } (2, -1).}$

2) a) $x' + y' = -5y + 4 + 5x + 6 = 5x - 5y + 10 = 5(x - y + 2)$. Puisque $x - y + 2$ est un entier relatif, ceci montre que $x' + y'$ est un multiple de 5.

b) $(x' + y') - (x' - y') = 2y'$ et donc $(x' + y') - (x' - y') \equiv 0$ (modulo 2) ou encore $x' + y' \equiv x' - y'$ (modulo 2).

Supposons que $x'^2 - y'^2$ soit un multiple de 2.

Si $x' - y' \not\equiv 0$ (modulo 2) alors $x' - y' \equiv 1$ (modulo 2) puis $x' + y' \equiv 1$ (modulo 2) d'après la question précédente.
Mais alors $(x' - y')(x' + y') \equiv 1 \times 1$ (modulo 2) ou encore $x'^2 - y'^2 \equiv 1$ (modulo 2).
Ceci est une contradiction et donc $x' - y' \equiv 0$ (modulo 2) puis $x' + y' \equiv 0$ (modulo 2) puisque $x' - y'$ et $x' + y'$ sont congrus modulo 2.

c) Soit M un point de (E) tel que $x'^2 - y'^2 = 20$. Alors, $x' = -5y + 4$ et $y' = 5x + 6$ sont deux entiers relatifs. Ensuite, $x'^2 - y'^2$ est pair et donc $x' - y'$ et $x' + y'$ sont pairs d'après la question précédente. D'autre part, $x' + y'$ est un multiple de 5 d'après la question a).
Puisque $x' + y'$ est un multiple des nombres premiers 2 et de 5, $x' + y'$ est un multiple de $2 \times 5 = 10$. En résumé,

- $(x' - y')(x' + y') = 20$
- $x' - y'$ est un entier relatif qui est un multiple de 2
- $x' + y'$ est un entier relatif qui est un multiple de 10.

Ceci ne laisse que deux possibilités :

- $x' - y' = 2$ et $x' + y' = 10$ puis $x' = \dfrac{10 + 2}{2} = 6$ et $y' = \dfrac{10 - 2}{2} = 4$
- $x' - y' = -2$ et $x' + y' = -10$ puis $x' = \dfrac{-2 - 10}{2} = -6$ et $y' = \dfrac{-10 + 2}{2} = -4$.

Dans le premier cas, $x = \dfrac{y' - 6}{5} = \dfrac{4 - 6}{5} = -\dfrac{2}{5}$ et x n'est pas un entier relatif.
Dans le deuxième cas, $x = \dfrac{y' - 6}{5} = \dfrac{-4 - 6}{5} = -2$ et $y = \dfrac{4 - x'}{5} = \dfrac{4 + 6}{5} = 2$.
Réciproquement, le couple $(x, y) = (-2, 2)$ est bien un élément de (E). De plus, pour ce couple (x, y), on a

$$(x', y') = (-5 \times 2 + 4, 5 \times (-2) + 6) = (-6, -4)$$

puis $x'^2 - y'^2 = 36 - 16 = 20$. Finalement,

$$\boxed{\text{il existe exactement un point de } (E) \text{ tel que } x'^2 - y'^2 = 20 \text{ : le point de coordonnées } (-2, 2).}$$

