Rochambeau 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (5 points) (commun à tous les candidats)

Partie A. Restitution organisée de connaissances

On rappelle que $\lim\limits_{t \to +\infty} \dfrac{e^t}{t} = +\infty$.

Démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur $[1, +\infty[$ par $f(x) = x - \dfrac{\ln(x)}{x}$.

On note (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

1) Soit g la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par $g(x) = x^2 - 1 + \ln(x)$.
Montrer que la fonction g est positive sur $[1, +\infty[$.

2) a) Montrer que, pour tout x de $[1, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

b) En déduire le sens de variation de f sur $[1, +\infty[$.

c) Étudier la position de la courbe (C) par rapport à la droite (D) d'équation $y = x$.

3) Pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, on note respectivement M_k et N_k les points d'abscisse k de (C) et (D).

a) Montrer que, pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2, la distance M_kN_k entre les points M_k et N_k est donnée par $M_kN_k = \dfrac{\ln(k)}{k}$.

b) Écrire un algorithme déterminant le plus petit entier k_0 supérieur ou égal à 2 tel que la distance M_kN_k soit inférieure ou égale à 10^{-2}.

