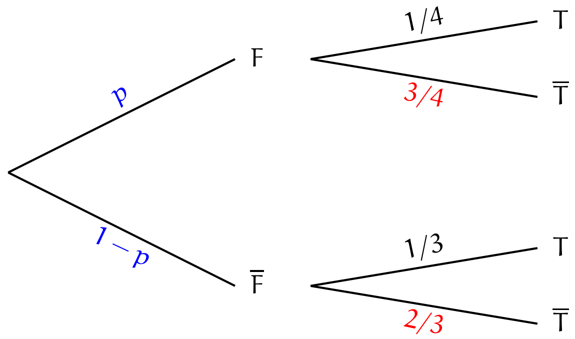
Rochambeau 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

Partie A

1) L'énoncé fournit $p_F(T) = \frac{1}{4}$, $p_{\overline{F}}(T) = \frac{1}{3}$ et $p(T) = \frac{3}{10}$ et demande $p(F)$. Posons $p = p(F)$. Représentons la situation par un arbre :



La formule des probabilités totales fournit :

$$p(T) = p(F \cap T) + p\left(\overline{F} \cap T\right) = p(F) \times p_F(T) + p\left(\overline{F}\right) \times p_{\overline{F}}(T),$$

et donc $\frac{1}{4}p + \frac{1}{3}(1-p) = \frac{3}{10}$ puis $\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right)p = \frac{1}{3} - \frac{3}{10}$ puis $\frac{p}{12} = \frac{1}{30}$ et finalement

$$p(F) = \frac{12}{30} = \frac{2 \times 6}{5 \times 6} = \frac{2}{5}.$$

$$\boxed{p(F) = \frac{2}{5}.}$$

2) La probabilité demandée est $p_T(F)$.

$$p_T(F) = \frac{p(F \cap T)}{p(T)} = \frac{p(F) \times p_F(T)}{p(T)} = \frac{\frac{2}{5} \times \frac{1}{4}}{\frac{3}{10}} = \frac{1}{10} \times \frac{10}{3} = \frac{1}{3}.$$

$$\boxed{p_T(F) = \frac{1}{3}.}$$

Partie B

1) a) Notons Y le nombre de membres adhérant à la section tennis parmi les membres choisis. La variable aléatoire Y est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- 4 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « le membre choisi adhère à la section tennis » avec une probabilité $p = \frac{3}{10}$ ou « le membre choisi n'adhère pas à la section tennis » avec une probabilité $1 - p = \frac{7}{10}$.

La variable aléatoire Y suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 4$ et $p = \frac{3}{10}$.

La probabilité demandée est $p(Y = 2)$. La calculatrice fournit

$$p(Y = 2) = \binom{4}{2}\left(\frac{3}{10}\right)^2\left(\frac{7}{10}\right)^2 = 0,2646.$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On remplace 4 par n et on obtient pour tout entier k tel que $0 \leqslant k \leqslant n$,

$$p(Y = k) = \binom{n}{k}\left(\frac{3}{10}\right)^k\left(\frac{7}{10}\right)^{n-k}.$$

Par suite,

$$p_n = p(Y \geqslant 1) = 1 - p(Y=0) = 1 - \binom{n}{0}\left(\frac{3}{10}\right)^0\left(\frac{7}{10}\right)^n = 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n.$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned} p_n \geqslant 0,99 \Leftrightarrow 1 - \left(\frac{7}{10}\right)^n \geqslant 0,99 \Leftrightarrow \left(\frac{7}{10}\right)^n \leqslant 0,01 \Leftrightarrow \left(\frac{10}{7}\right)^n \geqslant 100 \\ &\Leftrightarrow n\ln\left(\frac{10}{7}\right) \geqslant \ln(100) \text{ (par stricte croissance de la fonction ln sur }]0,+\infty[) \\ &\Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(100)}{\ln\left(\frac{10}{7}\right)} \text{ (car } \ln(10/7) > 0) \\ &\Leftrightarrow n \geqslant 12,9\ldots \\ &\Leftrightarrow n \geqslant 13 \text{ (car } n \text{ est un entier).} \end{aligned}$$

Le nombre minimal de semaines pour que $p_n \geqslant 0,99$ est 13.

2) La variable aléatoire X prend trois valeurs : $35 = 40 - 5$ quand le joueur tire deux jetons gagnants, $15 = 20 - 5$ quand le joueur tire un jeton gagnant et -5 quand le joueur ne tire aucun jeton gagnant.

- La probabilité de tirer deux jetons gagnants est $\left(\frac{10}{100}\right)^2 = \left(\frac{1}{10}\right)^2 = \frac{1}{100}$.
- La probabilité de ne tirer aucun jeton gagnant est $\left(\frac{90}{100}\right)^2 = \left(\frac{9}{10}\right)^2 = \frac{81}{100}$.
- La probabilité de tirer un jeton gagnant est $1 - \frac{1}{100} - \frac{81}{100} = \frac{18}{100}$.

Donnons la loi de probabilité de X dans un tableau :

x_i	35	15	-5
$p(X = x_i)$	$\frac{1}{100}$	$\frac{18}{100}$	$\frac{81}{100}$

b) L'espérance mathématique de X est

$$E(X) = 35 \times \frac{1}{100} + 15 \times \frac{18}{100} - 5 \times \frac{81}{100} = \frac{35 + 270 - 405}{100} = -1.$$

Le gain algébrique moyen à cette loterie est -1 € ou encore en moyenne, le joueur perd 1 euro par partie jouée. Le gain algébrique est strictement négatif et donc le jeu est défavorable au joueur ou encore le jeu est favorable aux membres de l'association qui organisent la loterie.

