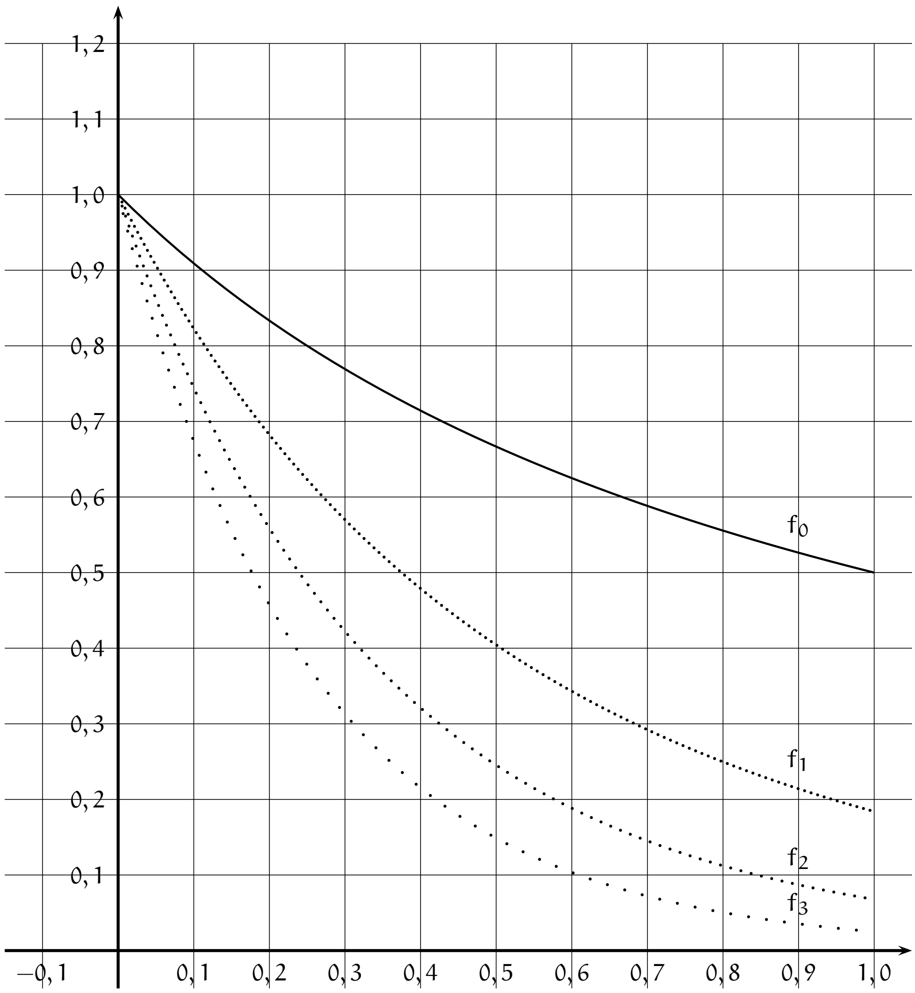
Pondichéry 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (5 points) (commun à tous les candidats)

On considère les suites (I_n) et (J_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x}\,dx \text{ et } J_n = \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2}\,dx.$$

1) Sont représentées ci-dessous les fonctions f_n définies sur l'intervalle $[0;1]$ par $f_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{1+x}$, pour différentes valeurs de n :



a) Formuler une conjecture sur le sens de variation de la suite (I_n) en expliquant la démarche.

b) Démontrer cette conjecture.

2) a) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 0$ et pour tout nombre réel x de l'intervalle $[0;1]$:

$$0 \leqslant \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2} \leqslant \frac{e^{-nx}}{1+x} \leqslant e^{-nx}.$$

b) Montrer que les suites (I_n) et (J_n) sont convergentes et déterminer leur limite.

3) a) Pour tout entier naturel n et tout réel x de $[0;1]$, on pose $g_n(x) = \dfrac{e^{-nx}}{(1+x)^2}$.

Démontrer que pour tout entier naturel n et tout réel x de $[0;1]$,

$$f'_n(x) = -nf_n(x) - g_n(x).$$

b) En déduire que pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$I_n = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{e^{-n}}{2} - J_n\right).$$

c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$.

