

EXERCICE 3 : corrigé

1) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction f_n est continue et positive sur $[0, 1]$. Donc, I_n est l'aire du domaine du plan $\mathcal{D}_n$ délimité par les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = 1$ d'une part, l'axe des abscisses et la courbe représentative de la fonction f_n d'autre part.

Il semble que pour chaque entier naturel n , le graphe de f_n soit au-dessus du graphe de f_{n+1} sur $[0, 1]$ et donc que l'aire du domaine $\mathcal{D}_n$ soit plus grande que l'aire du domaine $\mathcal{D}_{n+1}$.

En résumé, il semble que pour tout entier naturel n , $I_{n+1} \leq I_n$ ou encore, il semble que la suite (I_n) soit décroissante.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} I_n - I_{n+1} &= \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x} dx - \int_0^1 \frac{e^{-(n+1)x}}{1+x} dx = \int_0^1 \left(\frac{e^{-nx}}{1+x} - \frac{e^{-(n+1)x}}{1+x} \right) dx \quad (\text{par linéarité de l'intégrale}) \\ &= \int_0^1 \frac{e^{-nx} - e^{-(n+1)x}}{1+x} dx = \int_0^1 \frac{e^{-nx}(1 - e^{-x})}{1+x} dx. \end{aligned}$$

Soit $x \in [0, 1]$. On a $e^{-nx} \geq 0$ et $\frac{1}{1+x} \geq 0$. Ensuite, $-x \leq 0$ et donc $e^{-x} \leq 1$ puis $1 - e^{-x} \geq 0$. Finalement,

$$\frac{e^{-nx}(1 - e^{-x})}{1+x} \geq 0.$$

Ainsi, pour tout réel x de $[0, 1]$, $\frac{e^{-nx}(1 - e^{-x})}{1+x} \geq 0$.

Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\int_0^1 \frac{e^{-nx}(1 - e^{-x})}{1+x} dx \geq 0$ ou encore que $I_n - I_{n+1} \geq 0$ ou enfin que $I_{n+1} \leq I_n$.

On a montré que pour tout entier naturel n , $I_{n+1} \leq I_n$ et donc que

la suite (I_n) est décroissante.

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in [0, 1]$. Alors $1+x \geq 1$ puis $\frac{1}{1+x} \leq 1$. En multipliant les membres de cette inégalité par le réel positif e^{-nx} , on obtient

$$\frac{e^{-nx}}{1+x} \leq e^{-nx}.$$

En multipliant les deux membres de l'inégalité $\frac{1}{1+x} \leq 1$ par le réel positif $\frac{e^{-nx}}{1+x}$, on obtient aussi

$$\frac{e^{-nx}}{(1+x)^2} \leq \frac{e^{-nx}}{1+x}.$$

Enfin, $\frac{e^{-nx}}{(1+x)^2} \geq 0$ et on a montré que

$$\text{pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ et tout } x \in [0, 1], 0 \leq \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2} \leq \frac{e^{-nx}}{1+x} \leq e^{-nx}.$$

b) D'après la question précédente et par positivité et croissance de l'intégrale, pour tout entier naturel n on a

$$0 \leq \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2} dx \leq \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x} dx \leq \int_0^1 e^{-nx} dx.$$

Mais pour tout entier naturel non nul n ,

$$\int_0^1 e^{-nx} dx = \left[\frac{e^{-nx}}{-n} \right]_0^1 = \frac{e^{-n}}{-n} - \frac{1}{-n} = \frac{1 - e^{-n}}{n}.$$

En résumé, pour tout entier naturel non nul n ,

$$0 \leq J_n \leq I_n \leq \frac{1 - e^{-n}}{n}. \quad (*)$$

On sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ et d'autre part, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$. Par suite, $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n}(1 - e^{-n}) = 0 \times (1 - 0) = 0$.

Les inégalités (*) montrent que pour tout entier naturel non nul n , on a $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n}(1 - e^{-n})$. Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que la suite (I_n) converge et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$

Les inégalités (*) montrent aussi que pour tout entier naturel non nul n , on a $0 \leq J_n \leq I_n$. Le théorème des gendarmes permet alors d'affirmer que la suite (J_n) converge et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0.$$

3) (a) Soit n un entier naturel. Pour tout réel x de $[0, 1]$, $f_n(x) = e^{-nx} \times \frac{1}{1+x}$.
 f_n est dérivable sur $[0, 1]$ et pour tout réel x de $[0, 1]$,

$$f'_n(x) = (-n)e^{-nx} \times \frac{1}{1+x} + e^{-nx} \times \left(-\frac{1}{(1+x)^2}\right) = -n \frac{e^{-nx}}{1+x} - \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2} = -nf_n(x) - g_n(x).$$

b) Soit $n \geq 1$. En intégrant l'égalité précédente et par linéarité de l'intégrale, on obtient

$$\begin{aligned} -nI_n - J_n &= -n \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{1+x} dx - \int_0^1 \frac{e^{-nx}}{(1+x)^2} dx = \int_0^1 (-nf_n(x) - g_n(x)) dx \\ &= \int_0^1 f'_n(x) dx = [f_n(x)]_0^1 \\ &= \frac{e^{-n}}{1+1} - \frac{e^0}{0+1} = \frac{e^{-n}}{2} - 1 \end{aligned}$$

Ainsi, $-nI_n - J_n = \frac{e^{-n}}{2} - 1$ ou encore $I_n = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{e^{-n}}{2} - J_n\right)$. On a montré que

$$\text{pour tout entier naturel non nul } n, I_n = \frac{1}{n} \left(1 - \frac{e^{-n}}{2} - J_n\right).$$

b) Pour tout entier naturel non nul, $nI_n = 1 - \frac{e^{-n}}{2} - J_n$. Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{-n} = 0$ et que $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = 0$ (d'après la question 2)b)), on en déduit que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} nI_n = 1.$$