

EXERCICE 2

Proposition 1. **VRAI**

Proposition 2. **FAUX**

Proposition 3. **VRAI**

Proposition 4. **VRAI**

Justification 1 Un vecteur directeur de la droite $\mathcal{D}$ est le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(-2, 2, 2)$. Un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ est le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(1, -1, -1)$.

On remarque que $\vec{u} = -2\vec{n}$ et en particulier $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{n}$. On en déduit que la droite $\mathcal{D}$ est orthogonale au plan $\mathcal{P}$. La proposition 1 est vraie.

Justification 2 Le point A appartient à la droite $\mathcal{D}$ si et seulement si il existe un réel t tel que
$$\begin{cases} -3 - 2t = 3 \\ 2t = -6 \\ 1 + 2t = -4 \end{cases} . \text{ Or}$$

$$\begin{cases} -3 - 2t = 3 \\ 2t = -6 \\ 1 + 2t = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -3 \\ t = -3 \\ t = -\frac{5}{2} \end{cases}$$

Ce système n'a pas de solution car le réel t ne peut être égal à la fois à -3 et à $-\frac{5}{2}$ ou encore il n'existe pas de réel t

tel que $\begin{cases} -3 - 2t = 3 \\ 2t = -6 \\ 1 + 2t = -4 \end{cases}$. Donc le point A n'appartient pas à la droite $\mathcal{D}$. La proposition 2 est fausse.

Justification 3 On rappelle qu'un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$ est le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $(1, -1, -1)$.

Un vecteur normal au plan $\mathcal{P}'$ est le vecteur $\vec{n}'$ de coordonnées $(1, 1, 3)$. Les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{n}'$ ne sont pas colinéaires car s'il existe un réel k tel que $\vec{n}' = k\vec{n}$ alors $k = 1$ et aussi $k = -1$ ce qui est impossible.

On en déduit que les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ ne sont pas parallèles et donc que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants en une droite Δ .

Notons Δ' la droite de représentation paramétrique
$$\begin{cases} x = 1 - t' \\ y = -1 - 2t' \\ z = t' \end{cases} , t' \in \mathbb{R}.$$

Pour tout réel t' ,

$$(1 - t') - (-1 - 2t') - (t') - 2 = 0 \text{ et } (1 - t') + (-1 - 2t') + 3(t') = 0.$$

Donc tout point de la droite Δ' appartient au plan $\mathcal{P}$ et au plan $\mathcal{P}'$ ou encore la droite Δ' est contenue dans le plan $\mathcal{P}$ et dans le plan $\mathcal{P}'$. Finalement, Δ' est la droite Δ d'intersection des plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ ou encore un système

d'équations paramétriques de Δ est
$$\begin{cases} x = 1 - t' \\ y = -1 - 2t' \\ z = t' \end{cases} , t' \in \mathbb{R}.$$
 La proposition 3 est vraie.

Justification 4 On rappelle qu'un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ est le vecteur $\vec{u}$ de coordonnées $(-2, 2, 2)$.

Un vecteur directeur de Δ est le vecteur $\vec{u}'$ de coordonnées $(-1, -2, 1)$. Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$ ne sont pas colinéaires car sinon il existe un réel k tel que $-k = -2$ et $-2k = 2$ ce qui est impossible.

Donc les droites $\mathcal{D}$ et Δ ne sont pas parallèles. On en déduit que les droites $\mathcal{D}$ et Δ sont sécantes ou non coplanaires.

Déterminons alors l'intersection de $\mathcal{D}$ et Δ .

Soient $M(-3 - 2t, 2t, 1 + 2t)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de $\mathcal{D}$ et $M'(1 - t', -1 - 2t', t')$, $t' \in \mathbb{R}$, un point de Δ .

$$M = M' \Leftrightarrow \begin{cases} -3 - 2t = 1 - t' \\ 2t = -1 - 2t' \\ 1 + 2t = t' (*) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 1 + 2t (*) \\ -3 - 2t = 1 - (1 + 2t) \\ 2t = -1 - 2(1 + 2t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = 1 + 2t \\ -3 = 0 \times t \\ 2t = -1 - 2(1 + 2t) \end{cases} .$$

Ce système n'a pas de solution et donc $\mathcal{D}$ et Δ n'ont aucun point commun. Finalement, les droites $\mathcal{D}$ et Δ sont non coplanaires. La proposition 4 est vraie.