

Polynésie 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (5 points) (commun à tous les candidats)

Partie A

On considère l'algorithme suivant : les variables sont le réel U et les entiers naturels k et N .

Entrée	Saisir le nombre entier naturel non nul N
Traitement	Affecter à U la valeur 0 Pour k allant de 0 à $N - 1$ Affecter à U la valeur $3U - 2k + 3$ Fin pour
Sortie	Afficher U .

Quel est l'affichage en sortie lorsque $N = 3$?

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} = 3u_n - 2n + 3$.

1) Calculer u_1 et u_2 .

2) a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , $u_n \geq n$.

b) En déduire la limite de la suite (u_n) .

3) Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

4) Soit la suite (v_n) définie, pour tout entier naturel n , par $v_n = u_n - n + 1$.

a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n , $u_n = 3^n + n - 1$.

5) Soit p un entier naturel non nul.

a) Pourquoi peut-on affirmer qu'il existe au moins un entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq 10^p$?

On s'intéresse maintenant au plus petit entier n_0 .

b) Justifier que $n_0 \leq 3p$.

c) Déterminer à l'aide de la calculatrice cet entier n_0 pour la valeur $p = 3$.

d) Proposer un algorithme qui, pour une valeur de p donnée en entrée, affiche en sortie la valeur du plus petit entier n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, on ait $u_n \geq 10^p$.