Nouvelle Calédonie 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (5 points) (commun à tous les candidats)

Partie A

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$P(z) = z^3 - \left(2 + i\sqrt{2}\right) z^2 + 2\left(1 + i\sqrt{2}\right) z - 2i\sqrt{2}.$$

1) Montrer que le nombre complexe $z_0 = i\sqrt{2}$ est solution de l'équation $P(z) = 0$.

2) a) Déterminer les réels a et b tels que $P(z) = \left(z - i\sqrt{2}\right)\left(z^2 + az + b\right)$.

b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z) = 0$.

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. On prendra 2 cm pour unité graphique.

On considère les points A, B, J et K d'affixes respectives :

$$z_A = 1 + i, \quad z_B = 1 - i, \quad z_J = i\sqrt{2} \quad \text{et} \quad z_K = e^{\frac{3i\pi}{4}}.$$

1) Placer les points A, B, J et K sur une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

2) Soit L le symétrique du point J par rapport au point K. Montrer que l'affixe de L est égale à $-\sqrt{2}$.

3) Montrer que les points A, B, J et L appartiennent à un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

4) Soient C et D les points d'affixes respectives $z_C = -1 - i$ et $z_D = -1 + i$.
Quelle est la nature du quadrilatère $ABCD$? Justifier la réponse.

