Nouvelle Calédonie 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 : corrigé

Partie A

1)

$$\begin{aligned}P(z_0) &= \left(i\sqrt{2}\right)^3 - \left(2+i\sqrt{2}\right)\left(i\sqrt{2}\right)^2 + 2\left(1+i\sqrt{2}\right)\left(i\sqrt{2}\right) - 2i\sqrt{2}\\ &= -2i\sqrt{2} + 2\left(2+i\sqrt{2}\right) + 2\left(i\sqrt{2}-2\right) - 2i\sqrt{2}\\ &= -2i\sqrt{2} + 4 + 2i\sqrt{2} + 2i\sqrt{2} - 4 - 2i\sqrt{2} = 0\end{aligned}$$

Donc $P(z_0) = 0$.

2) a) Soient a et b deux réels. Pour tout nombre complexe z,

$$\begin{aligned}\left(z-i\sqrt{2}\right)\left(z^2+az+b\right) &= z^3 + az^2 + bz - i\sqrt{2}z^2 - ia\sqrt{2}z - ib\sqrt{2}\\ &= z^3 + \left(a - i\sqrt{2}\right)z^2 + \left(b - ia\sqrt{2}\right)z - ib\sqrt{2}.\end{aligned}$$

Si on choisit les réels a et b tels que $\left\{\begin{array}{l} a - i\sqrt{2} = -\left(2+i\sqrt{2}\right)\\ b - ia\sqrt{2} = 2\left(1+i\sqrt{2}\right)\\ -ib\sqrt{2} = -2i\sqrt{2}\end{array}\right.$, alors pour tout nombre complexe z on aura $\left(z-i\sqrt{2}\right)\left(z^2+az+b\right) = P(z)$. Or,

$$\left\{\begin{array}{l} a - i\sqrt{2} = -\left(2+i\sqrt{2}\right)\\ b - ia\sqrt{2} = 2\left(1+i\sqrt{2}\right)\\ -ib\sqrt{2} = -2i\sqrt{2}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -2\\ b + 2i\sqrt{2} = 2\left(1+i\sqrt{2}\right)\\ b = 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -2\\ b = 2\\ b = 2\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} a = -2\\ b = 2\end{array}\right. .$$

Donc

$$\boxed{\text{pour tout nombre complexe } z,\ P(z) = \left(z-i\sqrt{2}\right)\left(z^2-2z+2\right).}$$

b) Soit z un nombre complexe.

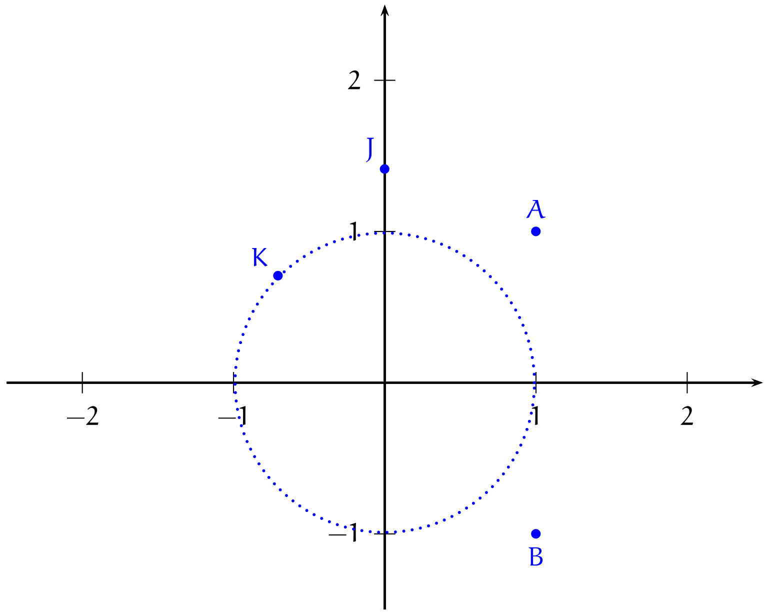
$$P(z) = 0 \Leftrightarrow z = i\sqrt{2} \text{ ou } z^2 - 2z + 2 = 0.$$

Le discriminant de l'équation $z^2-2z+2=0$ est $\Delta = (-2)^2 - 4\times 1\times 2 = -4 = (2i)^2$. Donc l'équation $z^2-2z+2=0$ admet deux solutions non réelles conjuguées à savoir $z_1 = \dfrac{2+2i}{2} = 1+i$ et $z_2 = \overline{z_1} = 1-i$.

$$\boxed{\text{Pour tout nombre complexe } z,\ P(z) = 0 \Leftrightarrow z \in \left\{i\sqrt{2}, 1+i, 1-i\right\}.}$$

Partie B

1)



2) $z_K = e^{\frac{3i\pi}{4}} = \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$.

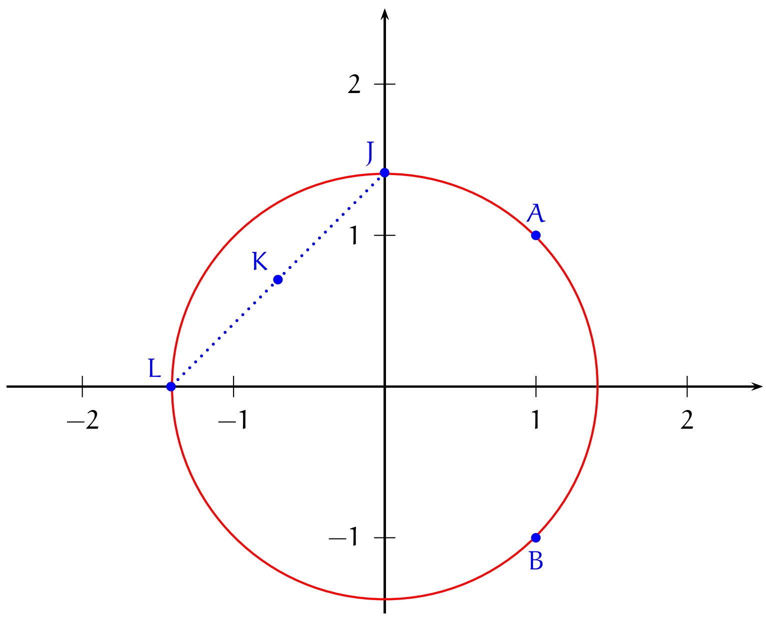
Le point K est le milieu du segment [JL]. Par suite, $\frac{z_L + z_J}{2} = z_K$ puis

$$z_L = 2z_K - z_J = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - i\sqrt{2} = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} - i\sqrt{2} = -\sqrt{2}.$$

$$\boxed{z_L = -\sqrt{2}.}$$

3) • $OA = |z_A| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.
• $OB = |z_B| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.
• $OJ = |z_J| = \sqrt{2}\,|i| = \sqrt{2}$.
• $OL = \left|-\sqrt{2}\right| = \sqrt{2}$.

$\boxed{\text{Les points A, B, J et L appartiennent au cercle de centre O et de rayon } \sqrt{2}.}$



4) • $z_C = -z_A$ et donc O est le milieu du segment [AC]. De même, $z_D = -z_B$ et donc O est le milieu du segment [BD].
Ainsi, les diagonales du quadrilatère ABCD ont même milieu et donc ABCD est un parallélogramme.

• Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ a pour coordonnées $(-2,-2)$ et le vecteur $\overrightarrow{BD}$ a pour coordonnées $(-2,2)$.
Par suite, $AC=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{8}$ et $BD=\sqrt{(-2)^2+2^2}=\sqrt{8}$. En particulier, $AC=BD$. D'autre part,

$$\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=(-2)\times(-2)+(-2)\times 2=0,$$

et donc $(AC)\perp(BD)$. En résumé, les diagonales du parallélogramme ABCD sont perpendiculaires et ont même longueur. On en déduit que

$$\boxed{\text{le quadrilatère } ABCD \text{ est un carré.}}$$