Liban 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal direct $\left(O;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v}\right)$.

1) Un triangle

a) On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a=2$, $b=3+i\sqrt{3}$ et $c=2i\sqrt{3}$.
Déterminer une mesure de l'angle $\widehat{ABC}$.

b) En déduire que l'affixe ω du centre Ω du cercle circonscrit au triangle ABC est $1+i\sqrt{3}$.

2) Une suite de nombres complexes

On note (z_n) la suite de nombres complexes, de terme initial $z_0=0$, et telle que :

$$z_{n+1}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n+2, \text{ pour tout entier naturel } n.$$

Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n.

a) Montrer que les points A_2, A_3 et A_4 ont pour affixes respectives :

$$3+i\sqrt{3},\quad 2+2i\sqrt{3}\quad \text{et}\quad 2i\sqrt{3}.$$

On remarquera que : $A_1=A$, $A_2=B$ et $A_4=C$.

b) Comparer les longueurs des segments $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$ et $[A_3A_4]$.

c) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}z+2$.

d) Établir que pour tout entier naturel n, on a :

$$z_{n+1}-\omega=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n-\omega).$$

où ω désigne le nombre complexe défini à la question **1)b)** (on utilisera le fait que $\omega=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}\omega+2$).

e) Déterminer la forme exponentielle de $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}$.

f) Justifier que, pour tout entier naturel n, on a : $A_{n+6}=A_n$. Déterminer l'affixe du point A_{2012}.

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.