# Liban 2012. Enseignement spécifique

**EXERCICE 3**

**1)** Quand l'événement $J_1$ est réalisé, on doit tirer une boule de l'urne $U_2$. Puisque l'urne $U_2$ contient 10 boules dont 4, sont blanches,

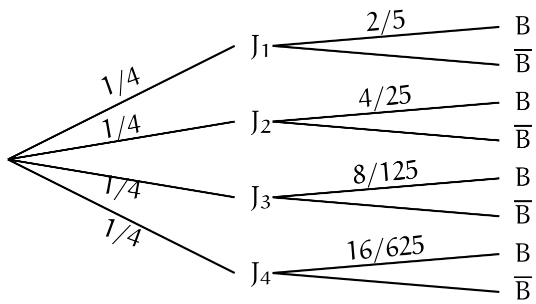
$$p_{J_1}(B) = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

Quand l'événement $J_2$ est réalisé, on doit tirer successivement avec remise deux boules de l'urne $U_2$. A chaque tirage, la probabilité d'obtenir une boule blanche est $\frac{2}{5}$. Donc, $p_{J_2}(B) = \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{4}{25}$.

De même, $p_{J_3}(B) = \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}$ et $p_{J_4}(B) = \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{16}{625}$.

$$\boxed{p_{J_1}(B) = \frac{2}{5},\ p_{J_2}(B) = \frac{4}{25},\ p_{J_3}(B) = \frac{8}{125} \text{ et } p_{J_4}(B) = \frac{16}{625}.}$$

**2)** Représentons la situation par un arbre.




D'après la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned}
p(B) &= p(J_1) \times p_{J_1}(B) + p(J_2) \times p_{J_2}(B) + p(J_3) \times p_{J_3}(B) + p(J_4) \times p_{J_4}(B) \\
&= \frac{1}{4}\left(\frac{2}{5} + \frac{4}{25} + \frac{8}{125} + \frac{16}{625}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{5} + \frac{2}{25} + \frac{4}{125} + \frac{8}{625}\right) = \frac{1}{2} \times \frac{125+50+20+8}{625} \\
&= \frac{203}{1250}.
\end{aligned}$$

$$\boxed{p(B) = \frac{203}{1250}.}$$

**3)** La probabilité demandée est $p_B(J_3)$.

$$p_B(J_3) = \frac{p(J_3 \cap B)}{p(B)} = \frac{p(J_3) \times p_{J_3}(B)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{4} \times \frac{8}{125}}{\frac{203}{1250}} = \frac{2}{125} \times \frac{1250}{203} = \frac{20}{203}.$$

$$\boxed{p_B(J_3) = \frac{20}{203}.}$$

**4) a)** La variable aléatoire $N$ est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- 10 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « toutes les boules tirées sont blanches » avec une probabilité $p = \frac{203}{1250}$ (d'après la question 2)) ou « au moins une boule tirée n'est pas blanche » avec une probabilité $1 - p = \frac{1047}{1250}$.

La variable aléatoire $N$ suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = \frac{203}{1250}$.

On sait alors que pour tout entier $k$ tel que $0 \leqslant k \leqslant 10$,

$$p(X = k) = \binom{10}{k} \left(\frac{203}{1250}\right)^{k} \left(\frac{1047}{1250}\right)^{10-k}.$$

**b)** La calculatrice fournit

$$p(N = 3) = \binom{10}{3} \left(\frac{203}{1250}\right)^{3} \left(\frac{1047}{1250}\right)^{7} = 0,148\ldots,$$

et donc

$$\boxed{p(N = 3) = 0,15 \text{ arrondi à } 10^{-2}.}$$