Liban 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (6 points) (commun à tous les candidats)

Partie A

On considère la fonction g définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = 2x^3 - 1 + 2\ln x.$$

1) Étudier les variations de la fonction g sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

2) Justifier qu'il existe un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$. Donner une valeur approchée de α, arrondie au centième.

3) En déduire le signe de la fonction g sur l'intervalle $]0, +\infty[$.

Partie B

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$f(x) = 2x - \frac{\ln x}{x^2}.$$

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan, muni d'un repère orthogonal $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$.

1) Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.

2) Étudier la position relative de la courbe $\mathscr{C}$ et de la droite Δ d'équation $y = 2x$.

3) Justifier que $f'(x)$ a même signe que $g(x)$.

4) En déduire le tableau de variation de la fonction f.

5) Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans le repère $\left(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right)$. On prendra comme unités : 2 cm sur l'axe des abscisses, 1cm sur l'axe des ordonnées.

Partie C

Soit n un entier naturel non nul. On considère le domaine $\mathscr{D}$ du plan compris entre la courbe $\mathscr{C}$, la droite Δ et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = n$.

1) Justifier que cette aire, exprimée en cm^2, est donnée par :

$$I_n = 2\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,dx.$$

2) a) Vérifier que la fonction $F\ :\ x \mapsto -\dfrac{\ln(x)}{x} - \dfrac{1}{x}$ est une primitive de la fonction $x \mapsto \dfrac{\ln(x)}{x^2}$ sur $[1, +\infty[$.

b) En déduire l'expression de I_n en fonction de n.

3) Calculer la limite de l'aire I_n du domaine $\mathscr{D}$ quand n tend vers $+\infty$.

