Asie 2012. Enseignement spécifique

France métropolitaine 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(O; \vec{u}; \vec{v}\right)$.

On appelle f l'application qui à tout point M d'affixe z différente de -1, fait correspondre le point M' d'affixe $\dfrac{1}{z+1}$.

Le but de l'exercice est de déterminer l'image par f de la droite $\mathscr{D}$ d'équation $x = -\dfrac{1}{2}$.

1) Soient A, B et C les points d'affixes respectives $z_A = -\dfrac{1}{2}$, $z_B = -\dfrac{1}{2} + i$ et $z_C = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}i$.

a) Placer les trois points A, B et C sur une figure que l'on fera sur la copie en prenant 2 cm pour unité graphique.

b) Calculer les affixes des points $A' = f(A)$, $B' = f(B)$ et $C' = f(C)$ et placer les points A', B' et C' sur la figure.

c) Démontrer que les points A', B' et C' ne sont pas alignés.

2) Soit g la transformation du plan qui, à tout point M d'affixe z, fait correspondre le point M_1 d'affixe $z + 1$.

a) Soit $\mathscr{D}_1$ l'ensemble des images des points de la droite $\mathscr{D}$ par g. Montrer que $\mathscr{D}_1$ est la droite d'équation $x = \dfrac{1}{2}$.

b) Placer les points A_1, B_1 et C_1, images respectives par g de A, B et C et tracer la droite $\mathscr{D}_1$.

c) Démontrer que $\mathscr{D}_1$ est l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z - 1| = |z|$.

3) Soit h l'application qui, à tout point M d'affixe z non nulle, associe le point M_2 d'affixe $\dfrac{1}{z}$.

a) Justifier que $h(A_1) = A'$, $h(B_1) = B'$ et $h(C_1) = C'$.

b) Démontrer que, pour tout nombre complexe non nul z, on a :

$$\left|\frac{1}{z} - 1\right| = 1 \Longleftrightarrow |z - 1| = |z|.$$

c) En déduire que l'image par h le la droite $\mathscr{D}_1$ est incluse dans un cercle $\mathscr{C}$ dont on précisera le centre et le rayon. Tracer ce cercle sur la figure.
On admet que l'image par h de la droite $\mathscr{D}_1$ est le cercle $\mathscr{C}$ privé de O.

4) Déterminer l'image par l'application f de la droite $\mathscr{D}$.

