France métropolitaine 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 3

Partie A

1) La limite d'une fraction rationnelle en $+\infty$ est égale à la limite du quotient de ses monômes de plus haut degré. Donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x+1}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{x}=1$. Par suite, $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)=\lim\limits_{X\to1}\ln(X)=\ln(1)=0$.

D'autre part, $\lim\limits_{x\to+\infty}(x+1)=+\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x+1}=0$. En additionnant, on obtient

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}f(x)=0.}$$

2) La fonction $x\mapsto\dfrac{x}{x+1}$ est dérivable sur $[1,+\infty[$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[1,+\infty[$. De plus, pour tout réel x de $[1,+\infty[$, $\dfrac{x}{x+1}>0$. On sait alors que la fonction $x\mapsto\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$ est dérivable sur $[1,+\infty[$. D'autre part, la fonction $x\mapsto\dfrac{1}{x+1}$ est dérivable sur $[1,+\infty[$ en tant que fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $[1,+\infty[$. Finalement, la fonction f est dérivable sur $[1,+\infty[$ en tant que somme de deux fonctions dérivables sur $[1,+\infty[$. De plus, pour tout réel x de $[1,+\infty[$,

1er calcul :

$$\begin{aligned}f'(x)&=-\frac{(x+1)'}{(x+1)^2}+\frac{\left(\dfrac{x}{x+1}\right)'}{\dfrac{x}{x+1}}=-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{x+1}{x}\times\frac{1\times(x+1)-x\times1}{(x+1)^2}=-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x(x+1)}\\&=\frac{-x+(x+1)}{x(x+1)^2}=\frac{1}{x(x+1)^2}.\end{aligned}$$

2ème calcul :

$$\begin{aligned}f'(x)&=\left(\frac{1}{x+1}\right)'+(\ln(x))'-(\ln(x+1))'=-\frac{1}{(x+1)^2}+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}=\frac{-x+(x+1)^2-x(x+1)}{x(x+1)^2}\\&=\frac{-x+x^2+2x+1-x^2-x}{x(x+1)^2}=\frac{1}{x(x+1)^2}.\end{aligned}$$

3) Pour tout réel x de $[1,+\infty[$, $f'(x)>0$. Donc la fonction f est strictement croissante sur $[1,+\infty[$. Mais alors, pour tout x de $[1,+\infty[$, on a $f(x)<\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)$ ou encore $f(x)<0$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est strictement négative sur } [1,+\infty[.}$$

Partie B

1)
- Initialisation : $u=0$.
- Etape 1 : $i=1$ puis $u=0+\dfrac{1}{1}=1$.
- Etape 2 : $i=2$ puis $u=1+\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$.
- Etape 3 : $i=3$ puis $u=\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{3}=\dfrac{11}{6}$.

Si $n=3$, la valeur exacte affichée par l'algorithme est $\dfrac{13}{6}$.

2)

Variables :	i et n sont des entiers naturels.
	u est un réel.
Entrée :	Demander à l'utilisateur la valeur de n.
Initialisation :	Affecter à u la valeur 0.
Traitement :	Pour i variant de 1 à n.
	Affecter à u la valeur $u+\dfrac{1}{i}$.
Sortie :	Afficher $u-\ln(n)$

3) Il semble que la suite (u_n) soit décroissante, convergente de limite approximativement égale à $0,57$.

Partie C

1) Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned} u_{n+1} - u_n &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1}\right) - \ln(n+1) - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}\right) + \ln(n) \\ &= \frac{1}{n+1} + \ln(n) - \ln(n+1) = \frac{1}{n+1} + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = f(n). \end{aligned}$$

D'après la question 3) de la partie A, le fonction f est strictement négative sur $[1, +\infty[$. En particulier, pour tout entier $n \geqslant 1$, $f(n) < 0$. Ainsi, pour tout entier naturel non nul n, on a $u_{n+1} - u_n < 0$ et donc

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geqslant 1} \text{ est strictement décroissante.}}$$

2) a) Soit k un entier strictement positif. La fonction $x \mapsto \frac{1}{k} - \frac{1}{x}$ est continue sur $]0, +\infty[$ et en particulier sur $[k, k+1]$. Donc l'intégrale $\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right) dx$ existe.

Pour tout réel x de l'intervalle $[k, k+1]$, on a $x \geqslant k > 0$ puis $\frac{1}{x} \leqslant \frac{1}{k}$ (par décroissance de la fonction $t \mapsto \frac{1}{t}$ sur $]0, +\infty[)$ et donc $\frac{1}{k} - \frac{1}{x} \geqslant 0$.

Ainsi, pour tout réel x de $[k, k+1]$, on a $\frac{1}{k} - \frac{1}{x} \geqslant 0$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right) dx \geqslant 0$.

Par linéarité de l'intégrale, on a alors

$$\int_k^{k+1} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{x}\right) dx = \int_k^{k+1} \frac{1}{k}\, dx - \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx = \frac{1}{k} \times (k+1-k) - \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx = \frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx.$$

Par suite, $\frac{1}{k} - \int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx \geqslant 0$ ou encore $\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx \leqslant \frac{1}{k}$.

Enfin, $\int_k^{k+1} \frac{1}{x}\, dx = [\ln(x)]_k^{k+1} = \ln(k+1) - \ln k$ et on a donc montré que

$$\boxed{\text{pour tout entier } k \text{ strictement positif, } \ln(k+1) - \ln k \leqslant \frac{1}{k} \quad (1).}$$

b) Soit n un entier strictement positif. D'après la question précédente,

$$\begin{array}{lcc} \ln(2) - \ln(1) & \leqslant & 1 \\ \ln(3) - \ln(2) & \leqslant & \dfrac{1}{2} \\ \ln(4) - \ln(3) & \leqslant & \dfrac{1}{3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \ln(n-1) - \ln(n-2) & \leqslant & \dfrac{1}{n-2} \\ \ln(n) - \ln(n-1) & \leqslant & \dfrac{1}{n-1} \\ \ln(n+1) - \ln(n) & \leqslant & \dfrac{1}{n} \end{array}$$

On additionne membre à membre ces n inégalités. Dans le premier membre, les nombres $\ln(2)$, $\ln(3)$, $\ldots$, $\ln(n-1)$ et $\ln(n)$ se simplifient et il reste $-\ln(1) + \ln(n+1) \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$ ou encore $\ln(n+1) \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On retranche $\ln(n)$ à chacun des deux membres de l'inégalité précédente et on obtient

$$\ln(n+1) - \ln(n) \leqslant 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n)$$

ou encore

$$u_n \geqslant \ln(n+1) - \ln(n).$$

Par croissance de la fonction ln sur $]0, +\infty[$, on a $\ln(n+1) \geqslant \ln(n)$ puis $\ln(n+1) - \ln(n) \geqslant 0$.
Par suite, $u_n \geqslant \ln(n+1) - \ln(n) \geqslant 0$. On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout entier strictement positif } n,\ u_n \geqslant 0.}$$

3) La suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante d'après la question 1) et minorée par 0 d'après la question 2). On en déduit que

$$\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\geqslant 1} \text{ converge.}}$$

