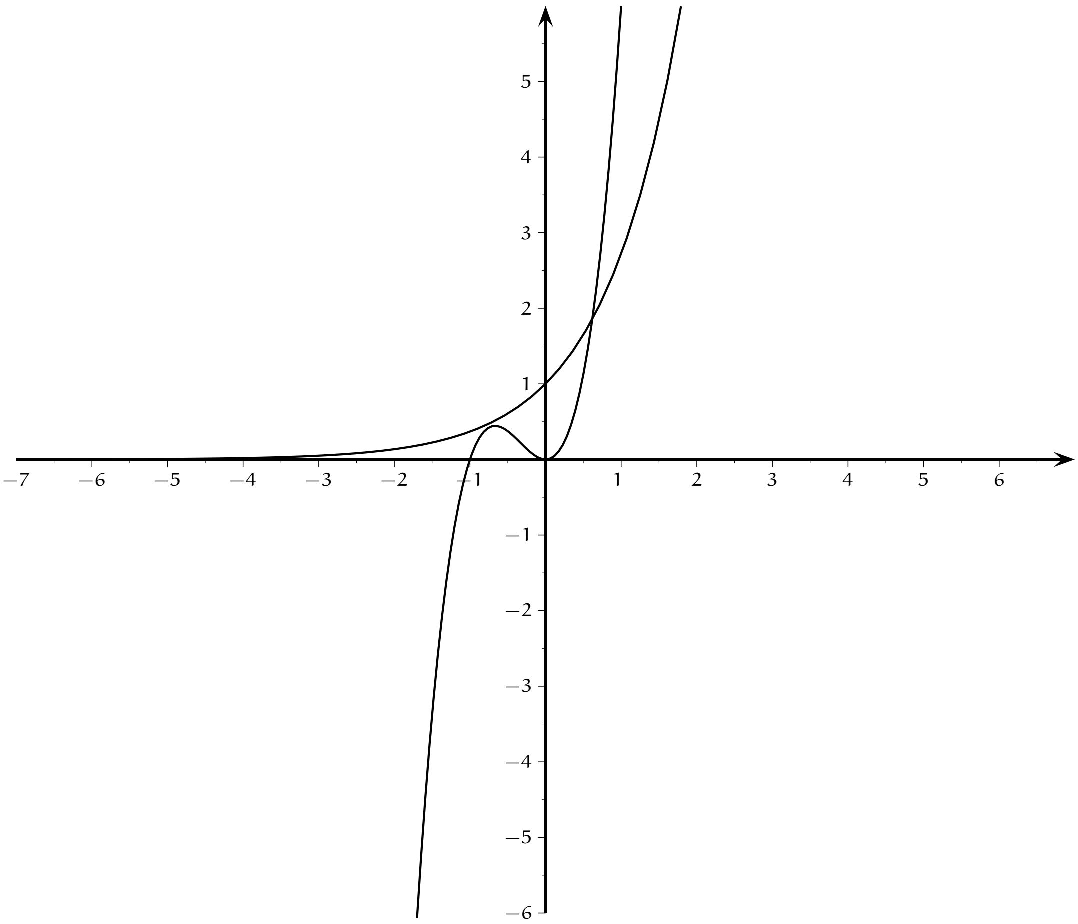
Centres étrangers 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (6 points) (commun à tous les candidats)

On considère l'équation (E) d'inconnue x réelle : $e^x = 3\left(x^2 + x^3\right)$.

Partie A : Conjecture graphique

Le graphique ci-dessous donne la courbe représentative de la fonction exponentielle et celle de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3\left(x^2 + x^3\right)$ telles que les affiche une calculatrice dans un même repère orthogonal.



À l'aide du graphique ci-dessus, conjecturer le nombre de solutions de l'équation (E) et leur encadrement par deux entiers consécutifs.

Partie B : étude de la validité de la conjecture graphique

1) a) Étudier selon les valeurs de x, le signe de $x^2 + x^3$.

b) En déduire que l'équation (E) n'a pas de solution sur l'intervalle $]-\infty; -1]$.

c) Vérifier que 0 n'est pas solution de (E).

2) On considère la fonction h, définie pour tout nombre réel de $]-1; 0[\cup]0; +\infty[$ par :

$$h(x) = \ln 3 + \ln(x^2) + \ln(1 + x) - x.$$

Montrer que, sur $]-1; 0[\cup]0; +\infty[$, l'équation (E) équivaut à $h(x) = 0$.

3) a) Montrer que, pour tout réel x appartenant à $]-1; 0[\cup]0; +\infty[$, on a :

$$h'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 2}{x(x+1)}.$$

b) Déterminer les variations de la fonction h.

c) Déterminer le nombre de solutions de l'équation $h(x) = 0$ et donner une valeur arrondie au centième de chaque solution.

d) Conclure quant à la conjecture de la partie A.

