Centres étrangers 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

Partie A : conjecture graphique

Il semblerait d'après le graphique que l'équation $h(x) = 0$ admette une solution et une seule et que cette solution appartienne à $[0, 1]$.

Partie B

1) a) Pour tout réel x, $x^2 + x^3 = x^2(x+1)$. Par suite, pour tout réel x de $]-\infty, -1[$, $x^2 + x^3 < 0$ puis pour tout réel x de $]-1, 0[\cup]0, +\infty[$, $x^2 + x^3 > 0$ et enfin pour $x \in \{-1, 0\}$, $x^2 + x^3 = 0$.

b) Soit x un réel de $]-\infty, -1]$. $e^x > 0$ et $3(x^2 + x^3) \leqslant 0$ et en particulier $e^x \neq 3(x^2 + x^3)$. Finalement

$$\boxed{\text{l'équation } (E) \text{ n'a pas de solution dans }]-\infty, -1].}$$

c) $e^0 = 1 \neq 0 = 3(0^2 + 0^3)$. Donc 0 n'est pas solution de l'équation (E).

2) Soit $x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[$. Alors $x^2 + x^3 > 0$ puis

$$\begin{aligned} e^x = 3(x^2 + x^3) &\Leftrightarrow \ln(e^x) = \ln\left(3(x^2 + x^3)\right) \Leftrightarrow x = \ln(3x^2(1+x)) \Leftrightarrow x = \ln 3 + \ln\left(x^2\right) + \ln(1+x) \\ &\Leftrightarrow \ln 3 + \ln\left(x^2\right) + \ln(1+x) - x = 0 \Leftrightarrow h(x) = 0. \end{aligned}$$

3) a) Pour tout réel x de $]-1, 0[\cup]0, +\infty[$,

$$\begin{aligned} h'(x) &= 0 + \frac{\left(x^2\right)'}{x^2} + \frac{(x+1)'}{x+1} - 1 = \frac{2x}{x^2} + \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{2}{x} + \frac{1}{x+1} - 1 = \frac{2(x+1) + x - x(x+1)}{x(x+1)} \\ &= \frac{-x^2 + 2x + 2}{x(x+1)}. \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ de }]-1, 0[\cup]0, +\infty[,\ h'(x) = \frac{-x^2 + 2x + 2}{x(x+1)}.}$$

b) Le discriminant du trinôme $-x^2 + 2x + 2$ est

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 12.$$

Le trinôme $-x^2 + 2x + 2$ admet donc deux racines, les deux nombres $x_1 = \frac{-2 + \sqrt{12}}{-2} = \frac{2 - 2\sqrt{3}}{2} = 1 - \sqrt{3}$ et $x_2 = 1 + \sqrt{3}$.

On note que $x_1 = -0,7\ldots$ et $x_2 = 2,7\ldots$ de sorte que $-1 < x_1 < 0 < x_2$. Le signe d'un trinôme du second degré étant connu, on peut détailler le signe de $h'(x)$ dans un tableau de signes :

x	-1		$1-\sqrt{3}$		0		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$-x^2+2x+2$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1$	0	$+$		$+$		$+$		$+$	
$h'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

On en déduit encore le tableau de variations de la fonction h :

x	-1		$1-\sqrt{3}$		0		$1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$h'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
h	$\Vert$	$\nearrow$	< 0	$\searrow$	$\Vert$	$\nearrow$	>0	$\searrow$	

La calculatrice fournit $h\left(1-\sqrt{3}\right) = -0,1\ldots < 0$ et $h\left(1+\sqrt{3}\right) = 1,6\ldots > 0$.

c) Sur l'intervalle $]-1,0[$, la fonction h admet un maximum strictement négatif. Par suite, pour tout réel x de $]-1,0[$, $h(x) < 0$ et en particulier pour tout réel x de $]-1,0[$, $h(x) \neq 0$. Donc l'équation (E) n'a pas de solution dans $]-1,0[$.

La calculatrice fournit encore $h(0,5) = -0,3\ldots < 0$. Comme la fonction h est strictement croissante sur $]0;0,5]$, on en déduit que pour tout réel x de $]0;0,5]$, $h(x) < 0$ et en particulier, pour tout réel x de $]0;0,5]$, $h(x) \neq 0$.

D'autre part, la fonction h est continue et strictement croissante sur $\left[0,5;1+\sqrt{3}\right]$. On sait alors que pour tout réel k de $\left[h(0,5), h(1+\sqrt{3})\right]$, l'équation $h(x) = k$ admet une solution et une seule dans $\left[0,5;1+\sqrt{3}\right]$. Comme $h(0,5) < 0$ et $h(1+\sqrt{3}) > 0$, le réel 0 appartient à l'intervalle $\left[h(0,5), h\left(1+\sqrt{3}\right)\right]$ et donc l'équation $h(x) = 0$ admet une solution et une seule, notée α, dans $\left[0,5;1+\sqrt{3}\right]$. La calculatrice fournit $h(0,615) = -0,009\ldots < 0$ et $h(0,62) = 0,004\ldots > 0$. Donc $0,615 < \alpha < 0,62$ puis $\alpha = 0,62$ arrondi au centième.

De même, l'équation $h(x) = 0$ admet une solution et une seule, notée β, dans $\left[1+\sqrt{3},+\infty\right[$ car par exemple $h(10) = -1,8\ldots < 0$.
La calculatrice fournit $h(7,115) = 0,001\ldots > 0$ et $h(1,12) = -0,001\ldots < 0$. Donc $7,115 < \beta < 7,12$ puis $\beta = 7,12$ arrondi au centième.

L'équation $h(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β
avec $\alpha = 0,62$ arrondi au centième et $\beta = 7,12$ arrondi au centième.

d) La conjecture émise dans la partie A était donc fausse. La solution β n'apparaissait pas sur le graphique fourni. Néanmoins cette solution était prévisible car un théorème de croissances comparées montre que le graphe de la fonction $x \mapsto e^x$ est au-dessus du graphe de la fonction $x \mapsto 3(x^2 + x^3)$ quand le réel positif x est grand et donc le graphe de la fonction $x \mapsto e^x$ devait recouper au moins une fois le graphe de la fonction $x \mapsto 3(x^2 + x^3)$.