Centres étrangers 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (5 points) (commun à tous les candidats)

On considère la suite (I_n) définie pour n entier naturel non nul par :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{x^2}\,dx.$$

Pour tout entier naturel non nul n et tout réel x, on pose $g_n(x) = x^n e^{x^2}$.

1) a) Démontrer que la fonction G_1 définie sur $\mathbb{R}$ par $G_1(x) = \dfrac{1}{2}e^{x^2}$ est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction g_1.

b) En déduire la valeur de I_1.

c) Pour tout entier naturel non nul n et tout réel x, on pose $h_n(x) = x^n$.

Montrer que pour tout réel x, $(h_{n+1} \times G_1)'(x) = g_{n+2}(x) + \dfrac{n+1}{2}g_n(x)$.

d) En déduire que, pour tout entier naturel n, supérieur ou égal à 1, on a :

$$I_{n+2} = \frac{1}{2}e - \frac{n+1}{2}I_n.$$

e) Calculer I_3 et I_5

2) On considère l'algorithme suivant :

Initialisation	Affecter à n la valeur 1 Affecter à u la valeur $\dfrac{1}{2}e - \dfrac{1}{2}$
Traitement	Tant que $n < 21$ Affecter à u la valeur $\dfrac{1}{2}e - \dfrac{n+1}{2}u$ Affecter à n la valeur $n + 2$
Sortie	Afficher u

Quel terme de la suite (I_n) obtient-on en sortie de cet algorithme ?

3) a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul n, $I_n \geqslant 0$.

b) Montrer que la suite (I_n) est décroissante.

c) En déduire que la suite (I_n) est convergente. On note ℓ sa limite.

4) *Dans cette question, toute trace de recherche même incomplète, ou d'initiative même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Déterminer la valeur de ℓ.

