

Centres étrangers 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

1) a) La fonction G_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x ,

$$G_1'(x) = \frac{1}{2} \times (x^2)' e^{x^2} = \frac{1}{2} \times 2x e^{x^2} = x e^{x^2} = g_1(x).$$

Donc la fonction G_1 est une primitive de la fonction g_1 sur $\mathbb{R}$.

$$b) I_1 = \int_0^1 x e^{x^2} dx = \left[\frac{1}{2} e^{x^2} \right]_0^1 = \frac{1}{2} e^1 - \frac{1}{2} e^0 = \frac{e-1}{2}.$$

$$I_1 = \frac{e-1}{2}.$$

c) Soit n un entier naturel non nul. Pour tout réel x ,

$$h_{n+1}(x) G_1(x) = x^{n+1} \times \frac{1}{2} e^{x^2} = \frac{1}{2} x^{n+1} e^{x^2}.$$

Par suite, pour tout réel x ,

$$(h_{n+1} G_1)'(x) = \frac{1}{2} (n+1) x^n e^{x^2} + \frac{1}{2} x^{n+1} \times (2x) e^{x^2} = x^{n+2} e^{x^2} + \frac{n+1}{2} x^n e^{x^2} = g_{n+2}(x) + \frac{n+1}{2} g_n(x).$$

d) Intégrons l'égalité précédente. Par linéarité de l'intégrale, on obtient

$$\begin{aligned} I_{n+2} + \frac{n+1}{2} I_n &= \int_0^1 x^{n+2} e^{x^2} dx + \frac{n+1}{2} \int_0^1 x^n e^{x^2} dx = \int_0^1 \left(x^{n+2} e^{x^2} + \frac{n+1}{2} x^n e^{x^2} \right) dx \\ &= \int_0^1 (h_{n+1} G_1)'(x) dx = [h_{n+1}(x) G_1(x)]_0^1 = \left[x^{n+1} \times \frac{1}{2} e^{x^2} \right]_0^1 \\ &= 1^{n+1} \times \frac{1}{2} e^1 \\ &= \frac{1}{2} e. \end{aligned}$$

On a montré que

$$\text{pour tout entier naturel non nul, } I_{n+2} = \frac{1}{2} e - \frac{n+1}{2} I_n.$$

$$e) I_3 = I_{1+2} = \frac{e}{2} - \frac{1+1}{2} I_1 = \frac{e}{2} - I_1 = \frac{e}{2} - \frac{e-1}{2} = \frac{1}{2} \text{ et } I_5 = \frac{e}{2} - \frac{3+1}{2} I_3 = \frac{e}{2} - 2 \times \frac{1}{2} = \frac{e-2}{2}.$$

$$I_3 = \frac{1}{2} \text{ et } I_5 = \frac{e-2}{2}.$$

2) n prend successivement les valeurs 1, 3, 5, ..., 19.

- Quand $n = 1$, $u = I_1$ puis, comme $1 < 21$, $u = \frac{1}{2} e - \frac{1+1}{2} I_1 = I_3$ puis $n = 3$.

- Puisque $n = 3 < 21$, $u = \frac{1}{2} e - \frac{3+1}{2} I_3 = I_5$ puis $n = 5$.

$\vdots$

- Puisque $n = 17 < 21$, $u = \frac{1}{2} e - \frac{17+1}{2} I_{17} = I_{19}$ puis $n = 19$.

- Puisque $n = 19 < 21$, $u = \frac{1}{2} e - \frac{19+1}{2} I_{19} = I_{21}$ puis $n = 21$ et l'algorithme s'arrête.

Finalement,

$$\text{en sortie, on obtient } I_{21}.$$

3) a) Soit n un entier naturel non nul. Pour tout réel x de $[0, 1]$, $x^n e^{x^2} \geq 0$. Par positivité de l'intégrale, on en déduit que $\int_0^1 x^n e^{x^2} dx \geq 0$. On a montré que

$$\text{Pour tout entier naturel non nul } n, I_n \geq 0.$$

b) Soit n un entier naturel non nul.

$$\begin{aligned} I_n - I_{n+1} &= \int_0^1 x^n e^{x^2} dx - \int_0^1 x^{n+1} e^{x^2} dx = \int_0^1 (x^n e^{x^2} - x^{n+1} e^{x^2}) dx \text{ (par linéarité de l'intégrale)} \\ &= \int_0^1 x^n (1 - x) e^{x^2} dx. \end{aligned}$$

Or, pour tout réel x de $[0, 1]$, $x^n (1 - x) e^{x^2} \geq 0$ et donc $\int_0^1 x^n (1 - x) e^{x^2} dx \geq 0$ par positivité de l'intégrale ou encore $I_n - I_{n+1} \geq 0$.

On a montré que pour tout entier naturel non nul n $I_n - I_{n+1} \geq 0$ ou encore pour tout entier naturel non nul n $I_{n+1} \leq I_n$ et donc

$$\text{la suite } (I_n) \text{ est décroissante.}$$

c) La suite (I_n) est décroissante et minorée par 0. On en déduit que la suite (I_n) est convergente vers un réel ℓ positif ou nul.

4) Supposons $\ell > 0$. D'après la question 1)c), pour tout entier naturel supérieur ou égal à 3, $I_n = \frac{e}{2} - \frac{n-1}{2} I_{n-2}$.

Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_{n-2} = \ell > 0$, on en déduit que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n-1}{2} I_{n-2} = +\infty$ puis que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{e}{2} - \frac{n-1}{2} I_{n-2} \right) = -\infty.$$

Ceci est une contradiction et donc $\ell = 0$.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0.$$