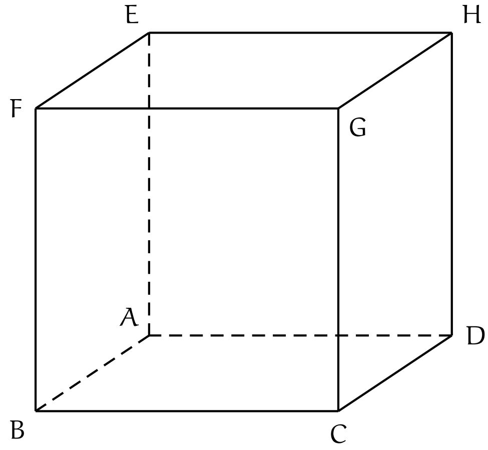
Centres étrangers 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (4 points) (commun à tous les candidats)

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1. On se place dans le repère orthonormal $\left(A; \overrightarrow{AB}; \overrightarrow{AD}; \overrightarrow{AE}\right)$.
On considère les points $I\left(1; \dfrac{1}{3}; 0\right)$, $J\left(0; \dfrac{2}{3}; 1\right)$, $K\left(\dfrac{3}{4}; 0; 1\right)$ et $L(a; 1; 0)$ avec a un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0; 1]$.



Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

1) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (IJ).

2) Démontrer que la droite (KL) a pour représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{l} x = \dfrac{3}{4} + t'\left(a - \dfrac{3}{4}\right) \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{array}\right., \ t' \in \mathbb{R}.$$

3) Démontrer que les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si, et seulement si, $a = \dfrac{1}{4}$.

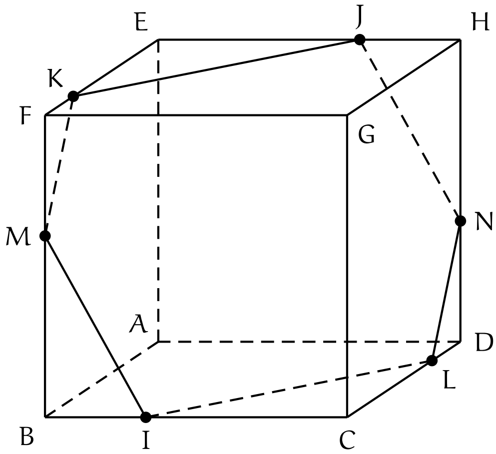
Partie B

Dans la suite de l'exercice, on pose $a = \dfrac{1}{4}$.

Le point L a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{4}; 1; 0\right)$.

1) Démontrer que le quadrilatère IKJL est un parallélogramme.

2) La figure ci-dessous fait apparaître l'intersection du plan (IJK) avec les faces du cube ABCDEFGH telle qu'elle a été obtenue à l'aide d'un logiciel de géométrie dynamique.
On désigne par M le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (BF) et par N le point d'intersection du plan (IJK) et de la droite (DH).



Le but de cette question est de déterminer les coordonnées des points M et N.

a) Prouver que le vecteur $\overrightarrow{n}$ de coordonnées $(8; 9; 5)$ est un vecteur normal au plan (IJK).
b) En déduire que le plan (IJK) a pour équation $8x + 9y + 5z - 11 = 0$.
c) En déduire les coordonnées des points M et N.

