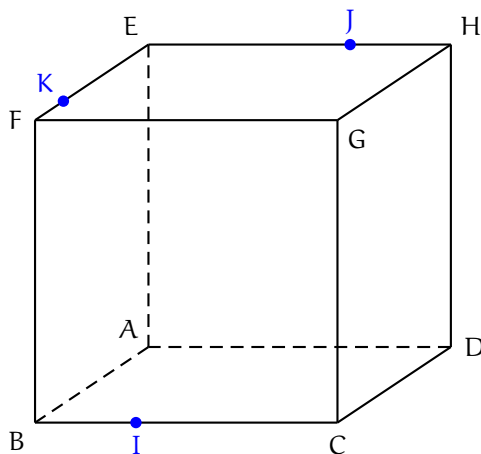


EXERCICE 1



- 1) Le point I a pour coordonnées $\left(1, \frac{1}{3}, 0\right)$ et le vecteur $\overrightarrow{IJ}$ a pour coordonnées $\left(-1, \frac{1}{3}, 1\right)$.

Une représentation paramétrique de la droite (IJ) est donc

$$\begin{cases} x = 1 - t \\ y = \frac{1}{3} + \frac{t}{3} \\ z = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}.$$

- 2) Le point K a pour coordonnées $\left(\frac{3}{4}, 0, 1\right)$ et le vecteur $\overrightarrow{KL}$ a pour coordonnées $\left(\alpha - \frac{3}{4}, 1, -1\right)$.

Une représentation paramétrique de la droite (KL) est donc

$$\begin{cases} x = \frac{3}{4} + t' \left(\alpha - \frac{3}{4}\right) \\ y = t' \\ z = 1 - t' \end{cases}, t' \in \mathbb{R}.$$

- 3) Soient $M \left(1 - t, \frac{1}{3} + \frac{t}{3}, t\right)$, $t \in \mathbb{R}$, un point de la droite (IJ) et $M' \left(\frac{3}{4} + t' \left(\alpha - \frac{3}{4}\right), t', 1 - t'\right)$, $t' \in \mathbb{R}$, un point de la droite (KL).

$$\begin{aligned} M = M' &\Leftrightarrow \begin{cases} 1 - t = \frac{3}{4} + t' \left(\alpha - \frac{3}{4}\right) \\ \frac{1}{3} + \frac{t}{3} = t' \\ t = 1 - t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 - t' \\ 1 - (1 - t') = \frac{3}{4} + t' \left(\alpha - \frac{3}{4}\right) \\ \frac{1}{3} + \frac{1 - t'}{3} = t' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = 1 - t' \\ \frac{4t'}{3} = \frac{2}{3} \\ t' = \frac{3}{4} + t' \left(\alpha - \frac{3}{4}\right) \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} t' = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2} \left(\alpha - \frac{3}{4}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{2} - \frac{3}{4} + \frac{3}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}\alpha = \frac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t' = \frac{1}{2} \\ t = \frac{1}{2} \\ \alpha = \frac{1}{4} \end{cases}. \end{aligned}$$

Si $\alpha \neq \frac{1}{4}$, le système précédent n'a pas de solution ou encore les droites (IJ) et (KL) n'ont aucun point commun.

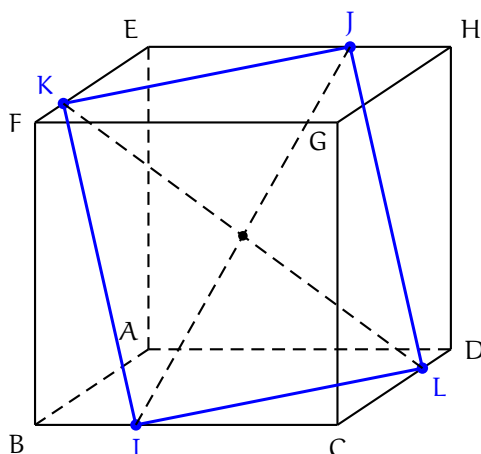
Si $\alpha = \frac{1}{4}$, la résolution précédente s'écrit plus simplement $M = M' \Leftrightarrow t = t' = \frac{1}{2}$. Dans ce cas, les droites (IJ) et (KL) ont en commun le point obtenu quand $t = \frac{1}{2}$ ou $t' = \frac{1}{2}$ à savoir le point Ω de coordonnées $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

En résumé,

les droites (IJ) et (KL) sont sécantes si et seulement si $\alpha = \frac{1}{4}$.

Partie B

1) Le vecteur $\overrightarrow{IK}$ a pour coordonnées $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}, 1\right)$ de même que le vecteur $\overrightarrow{LJ}$. Donc, $\overrightarrow{IK} = \overrightarrow{LJ}$ ou encore le quadrilatère IKJL est un parallélogramme.



2) a) Les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK). Pour vérifier que le vecteur non nul $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (IJK), il suffit de vérifier que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$.

On rappelle que les points I, J et K ont pour coordonnées respectives $\left(1, \frac{1}{3}, 0\right)$, $\left(0, \frac{2}{3}, 1\right)$ et $\left(\frac{3}{4}, 0, 1\right)$.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{IK}$ ont pour coordonnées respectives $\left(-1, \frac{1}{3}, 1\right)$ et $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{3}, 1\right)$.

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{IJ} = 8 \times (-1) + 9 \times \frac{1}{3} + 5 \times 1 = -8 + 3 + 5 = 0,$$

et

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{IK} = 8 \times \left(-\frac{1}{4}\right) + 9 \times \left(-\frac{1}{3}\right) + 5 \times 1 = -2 - 3 + 5 = 0.$$

Ainsi, le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur non nul orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (IJK) et donc

le vecteur $\vec{n}(8, 9, 5)$ est un vecteur normal au plan (IJK).

b) Le plan (IJK) est le plan passant par le point I $\left(1, \frac{1}{3}, 0\right)$ et de vecteur normal $\vec{n}(8, 9, 5)$. Une équation cartésienne du plan (IJK) est donc

$$8(x - 1) + 9\left(y - \frac{1}{3}\right) + 5(z - 0) = 0 \text{ ou encore } 8x + 9y + 5z - 11 = 0.$$

c) Puisque $M \in (BF)$, les coordonnées de M sont de la forme $(1, 0, z_M)$. Puis

$$M \in (IJK) \Leftrightarrow 8 \times 1 + 9 \times 0 + 5z_M - 11 = 0 \Leftrightarrow z_M = \frac{3}{5}.$$

Puisque $N \in (DH)$, les coordonnées de N sont de la forme $(0, 1, z_N)$. Puis

$$N \in (IJK) \Leftrightarrow 8 \times 0 + 9 \times 1 + 5z_N - 11 = 0 \Leftrightarrow z_N = \frac{2}{5}.$$

$M\left(1, 0, \frac{3}{5}\right)$ et $N\left(0, 1, \frac{2}{5}\right)$.

