

Asie 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 4 : corrigé

1)

n	a	b	u	v
0	4	9	4	9
1	6,5	6,964	6,5	6,964
2	6,732	6,736	6,732	6,736

2) a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n , $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

- Pour $n = 0$, on a $u_0 = a > 0$ et $v_0 = b > 0$. La proposition est donc vraie pour $n = 0$.
- Soit $n \geq 0$. Supposons que $u_n > 0$ et $v_n > 0$. Alors $u_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2} > 0$ et $v_{n+1} = \sqrt{\frac{u_n^2 + v_n^2}{2}} > 0$.

On a montré par récurrence que

pour tout entier naturel n , $u_n > 0$ et $v_n > 0$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} v_{n+1}^2 - u_{n+1}^2 &= \frac{u_n^2 + v_n^2}{2} - \left(\frac{u_n + v_n}{2} \right)^2 = \frac{u_n^2 + v_n^2}{2} - \frac{u_n^2 + 2u_n v_n + v_n^2}{4} \\ &= \frac{2u_n^2 + 2v_n^2 - u_n^2 - 2u_n v_n - v_n^2}{4} = \frac{u_n^2 - 2u_n v_n + v_n^2}{4} \\ &= \frac{(u_n - v_n)^2}{4} = \left(\frac{u_n - v_n}{2} \right)^2. \end{aligned}$$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. D'après ce qui précède, $v_n^2 - u_n^2 = \left(\frac{u_{n-1} - v_{n-1}}{2} \right)^2 \geq 0$ puis $v_n^2 \geq u_n^2$ puis $\sqrt{u_n^2} \leq \sqrt{v_n^2}$ et donc $u_n \leq v_n$ car u_n et v_n sont des nombres positifs.

D'autre part, l'inégalité $a \leq b$ s'écrit encore $u_0 \leq v_0$. Finalement,

pour tout entier naturel n , $u_n \leq v_n$.

3) a) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n + v_n}{2} - u_n = \frac{u_n + v_n - 2u_n}{2} = \frac{v_n - u_n}{2}.$$

La question précédente permet alors d'affirmer que $v_n - u_n \geq 0$ et donc que $u_{n+1} - u_n \geq 0$ puis que $u_{n+1} \geq u_n$.

Ainsi, pour tout entier naturel n , $u_{n+1} \geq u_n$ et donc

la suite (u_n) est croissante.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$.

$$v_{n+1}^2 - v_n^2 = \frac{u_n^2 + v_n^2}{2} - v_n^2 = \frac{u_n^2 - v_n^2}{2} = \frac{(u_n - v_n)(u_n + v_n)}{2}.$$

D'après les questions 2)a) et b), on a $v_{n+1}^2 - v_n^2 \leq 0$ ou encore $v_{n+1}^2 \leq v_n^2$. On en déduit que $v_{n+1} \leq v_n$ car v_n et v_{n+1} sont des réels positifs.

Puisque pour tout entier naturel n , $v_{n+1} \leq v_n$,

la suite (v_n) est décroissante.

4) Pour tout entier naturel n , on a $u_0 \leq u_n$ car la suite (u_n) est croissante. De même, pour tout entier naturel n , on a $v_0 \geq v_n$. Mais alors, d'après la question 2)b),

$$\text{pour tout entier naturel } n, u_0 \leq u_n \leq v_n \leq v_0.$$

La suite (u_n) est croissante et majorée par v_0 . On en déduit que la suite (u_n) converge. De même, la suite (v_n) est décroissante et minorée par v_0 et on en déduit que la suite (v_n) converge.

Les deux suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.