Asie 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (5 points) (commun à tous les candidats)

Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2. Une urne contient k boules noires et 3 boules blanches.
Ces $k+3$ boules sont indiscernables au toucher. Une partie consiste à prélever au hasard successivement et avec remise deux boules dans cette urne. On établit la règle de jeu suivante :

- un joueur perd 9 euros si les deux boules tirées sont de couleur blanche ;
- un joueur perd 1 euro si les deux boules tirées sont de couleur noire ;
- un joueur gagne 5 euros si les deux boules tirées sont de couleurs différentes ; on dit dans ce cas là qu'il gagne la partie.

Partie A

Dans la partie A, on pose $k=7$.
Ainsi l'urne contient 3 boules blanches et 7 boules noires indiscernables au toucher.

1) Un joueur joue une partie. On note p la probabilité que le joueur gagne la partie, c'est-à-dire la probabilité qu'il ait tiré deux boules de couleurs différentes. Démontrer que $p=0,42$.

2) Soit n un entier tel que $n>2$. Un joueur joue n parties identiques et indépendantes.
On note X la variable aléatoire qui comptabilise le nombre de parties gagnées par le joueur et p_n la probabilité que le joueur gagne au moins une fois au cours des n parties.

a) Expliquer pourquoi la variable X suit une loi binomiale de paramètres n et p.

b) Exprimer p_n en fonction de n, puis calculer p_{10} en arrondissant au millième.

c) Déterminer le nombre minimal de parties que le joueur doit jouer afin que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 99%.

Partie B

Dans la partie B, le nombre k est un entier naturel supérieur ou égal à 2.
Un joueur joue une partie.
On note Y_k la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.

1) a) Justifier l'égalité : $p(Y_k=5)=\dfrac{6k}{(k+3)^2}$.

b) Écrire la loi de probabilité de la variable aléatoire Y_k.

2) On note $E(Y_k)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y_k.
On dit que le jeu est favorable au joueur lorsque l'espérance $E(Y_k)$ est strictement positive.
Déterminer les valeurs de k pour lesquelles ce jeu est favorable au joueur.

