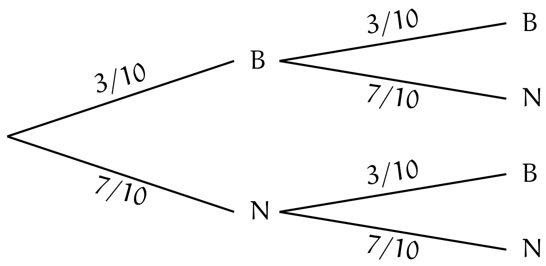
Asie 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

Partie A

1) On note N l'événement « la boule obtenue au cours d'un tirage est noire » et B l'événement « la boule obtenue au cours d'un tirage est blanche » (de sorte que l'événement B est l'événement $\overline{\mathrm{N}}$).

Représentons la situation par un arbre :



Les deux boules sont de couleurs différentes si et seulement si la première boule tirée est noire et la deuxième est blanche ou la première est blanche et la deuxième est noire.

La probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes est

$$p = \frac{7}{10} \times \frac{3}{10} + \frac{3}{10} \times \frac{7}{10} = \frac{42}{100} = 0,42.$$

2) a) La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- n expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « le candidat gagne la partie » avec une probabilité $p = 0,42$ (d'après la question précédente) ou « le candidat perd la partie » avec une probabilité $1 - p = 0,58$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,42$.

b) $p_n = p\,(X \geqslant 1) = 1 - p\,(X = 0) = 1 - \binom{n}{0} \times (0,42)^0 \times (0,58)^n = 1 - (0,58)^n$.

En particulier, $p_{10} = 1 - (0,58)^{10} = 0,996$ arrondie au millième.

c) Soit n un entier naturel non nul.

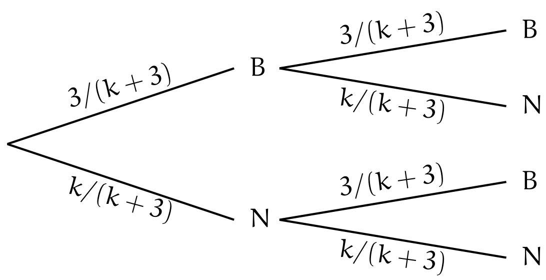
$$\begin{aligned}
p_n \geqslant 0,99 &\Leftrightarrow 1 - (0,58)^n \geqslant 0,99 \Leftrightarrow (0,58)^n \leqslant 0,01 \\
&\Leftrightarrow \ln\left((0,58)^n\right) \leqslant \ln(0,01) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0,+\infty[) \\
&\Leftrightarrow n\ln(0,58) \leqslant \ln(0,01) \\
&\Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,58)} \text{ (car } \ln(0,58) < 0) \\
&\Leftrightarrow n \geqslant 8,4\ldots \\
&\Leftrightarrow n \geqslant 9 \text{ (car } n \text{ est un entier).}
\end{aligned}$$

Le joueur doit jouer un nombre minimal de 9 parties pour que la probabilité de gagner au moins une fois soit supérieure à 99%.

Partie B

1) a) L'événement $Y_k = 5$ est l'événement « les deux boules tirées sont de couleurs différentes ».

Représentons la situation par un arbre :



$p\,(Y_k = 5)$ est la probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes ou encore

$$p(Y_k = 5) = \frac{k}{(k+3)} \times \frac{3}{k+3} + \frac{3}{k+3} \times \frac{k}{k+3} = \frac{6k}{(k+3)^2}.$$

b) De même, $p(Y_k = -9) = \dfrac{3}{k+3} \times \dfrac{3}{k+3} = \dfrac{9}{(k+3)^2}$ et $p(Y_k = -1) = \dfrac{k}{k+3} \times \dfrac{k}{k+3} = \dfrac{k^2}{(k+3)^2}$.

Donnons alors la loi de probabilité de Y_k dans un tableau :

y_i	-9	-1	5
$p(Y_k = y_i)$	$9/(k+3)^2$	$k^2/(k+3)^2$	$6k/(k+3)^2$

2) Soit k un entier naturel supérieur ou égal à 2.

$$E(Y_k) = (-9) \times \frac{9}{(k+3)^2} + (-1) \times \frac{k^2}{(k+3)^2} + 5 \times \frac{6k}{(k+3)^2} = \frac{-k^2 + 30k - 81}{(k+3)^2},$$

puis

$$\begin{aligned}
E(Y_k) > 0 &\Leftrightarrow \frac{-k^2+30k-81}{(k+3)^2} > 0 \Leftrightarrow -k^2 + 30k - 81 > 0 \text{ (car } (k+3)^2 > 0) \\
&\Leftrightarrow k^2 - 30k + 81 < 0 \Leftrightarrow (k-15)^2 - 15^2 + 81 < 0 \Leftrightarrow (k-15)^2 < 144 \\
&\Leftrightarrow -12 < k - 15 < 12 \Leftrightarrow 3 < k < 27 \Leftrightarrow 4 \leqslant k \leqslant 26.
\end{aligned}$$

Les valeurs de k pour lesquelles le jeu est favorable au joueur sont 4, 5, 6, ..., 24, 25 et 26.

