Asie 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 (5 points) (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

On considère le points A, d'affixe $z_A = -\sqrt{3} + i$, le point A_1 d'affixe $z_{A_1} = \overline{z_A}$ où $\overline{z_A}$ désigne le conjugué de z_A.

On note enfin B le point d'affixe $z_B = e^{i\frac{\pi}{6}} z_{A_1}$.

1) **a)** Écrire le nombre complexe z_A sous forme exponentielle, puis placer les points A et A_1, dans le repère. On prendra 2 cm comme unité graphique.

b) Vérifier que $z_B = 2e^{-\frac{2i\pi}{3}}$ sous forme exponentielle, puis écrire le nombre complexe z_B sous forme algébrique.
Placer alors le point B dans le même repère.

2) On considère le vecteur unitaire $\overrightarrow{w}$ tel que $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{w}\right) = \dfrac{\pi}{12}$ et la droite Δ passant par O de vecteur directeur $\overrightarrow{w}$.

a) Démontrer que le triangle OAB est rectangle isocèle en O.
b) Tracer la droite Δ.
c) Montrer que $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{w}\right) = \arg\left(\dfrac{z_{\overrightarrow{w}}}{z_A}\right)$ $[2\pi]$. On admettra que $\left(\overrightarrow{w}, \overrightarrow{OB}\right) = \arg\left(\dfrac{z_B}{z_{\overrightarrow{w}}}\right)$ $[2\pi]$.
d) Montrer que Δ est la bissectrice de l'angle $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right)$.
En déduire que les points A et B sont symétriques par rapport à la droite Δ.

3) On note B_1 le symétrique de B par rapport à l'axe $\left(O; \overrightarrow{u}\right)$ puis B' le point d'affixe $z_{B'} = e^{i\frac{\pi}{6}} z_{B_1}$.
Démontrer que $B' = A$.

4) *Dans cette question, toute trace de recherche ou d'initiative, même non aboutie, sera prise en compte dans l'évaluation.*

Soit C le point d'affixe $\sqrt{2}(1 + i)$ et D le symétrique de C par rapport à la droite Δ.
Construire les points C et D, puis calculer l'affixe du point D sous forme exponentielle.

