Antilles Guyane 2012. Enseignement de spécialité

EXERCICE 4

1) a) $11 \times 4 - 5 \times 6 = 44 - 30 = 14$ et donc le couple $(x_0, y_0) = (4, 6)$ est une solution de l'équation (E).

b) Soit (x, y) un couple d'entiers relatifs.

$$11x - 5y = 14 \Leftrightarrow 11x - 5y = 11x_0 - 5y_0 \Leftrightarrow 11(x - x_0) = 5(y - y_0).$$

Soit (x, y) une solution de (E).
Nécessairement l'entier 5 divise l'entier $5(y - y_0) = 11(x - x_0)$. Puisque 5 est premier à 11 (car les entiers 5 et 11 sont des nombres premiers distincts), le théorème de Gauss permet d'affirmer que 5 divise $x - x_0$. Par suite, il existe un entier relatif k tel que $x - x_0 = 5k$ ou encore $x = x_0 + 5k$.
De même, il existe nécessairement un entier relatif k' tel que $y = y_0 + 11k'$.

Soient alors k et k' deux entiers relatifs puis $x = x_0 + 5k$ et $y = y_0 + 11k'$.

$$\begin{aligned} 11x - 5y = 14 &\Leftrightarrow 11(x_0 + 5k) - 5(y_0 + 11k') = 14 \Leftrightarrow 11x_0 - 5y_0 + 5 \times 11 \times (k - k') = 14 \\ &\Leftrightarrow 5 \times 11 \times (k - k') = 0 \Leftrightarrow k = k'. \end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{\text{les couples d'entiers relatifs solutions de } (E) \text{ sont les couples de la forme } (4 + 5k, 6 + 11k) \text{ où } k \in \mathbb{Z}.}$$

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}$. $2^3 = 8 = 1 + 7$ et donc $2^3 \equiv 1 \pmod 7$ puis $\left(2^3\right)^n \equiv 1^n \pmod 7$ ou encore $2^{3n} \equiv 1 \pmod 7$.

$$\boxed{\text{Pour tout entier naturel } n,\ 2^{3n} \equiv 1 \pmod 7.}$$

b) $2011 = 287 \times 7 + 2$ et donc $2011 \equiv 2 \pmod 7$ puis $2011^{2012} \equiv 2^{2012} \pmod 7$.

$2012 = 3 \times 670 + 2$ et donc $2^{2012} = 2^2 \times 2^{3 \times 670}$. La question a) permet alors d'écrire que $2^{3 \times 670} \equiv 1 \pmod 7$ et donc $2^{2012} \equiv 2^2 \times 1 \pmod 7$ ou encore $2^{2012} \equiv 4 \pmod 7$.

Finalement, $2011^{2012} \equiv 4 \pmod 7$. Comme $0 \leqslant 4 < 7$, on a montré que

$$\boxed{\text{le reste de la division euclidienne de } 2011^{2012} \text{ par 7 est 4.}}$$

3) a) Soit d le PGCD de a et de b. L'entier d divise $a = 3n + 1$ et $b = 2n + 3$ et donc l'entier d divise l'entier

$$3b - 2a = 3(2n + 3) - 2(3n + 1) = 7.$$

On en déduit que $d = 1$ ou $d = 7$.

b) Si $d = 7$, nécessairement $3n + 1$ est divisible par 7 ou encore $3n + 1 \equiv 0 \pmod 7$. Or,

$$\begin{aligned} 3n + 1 \equiv 0 \pmod 7 &\Rightarrow 3n \equiv -1 \pmod 7 \Rightarrow 2 \times 3n \equiv 2 \times (-1) \pmod 7 \Rightarrow 6n \equiv -2 \pmod 7 \\ &\Rightarrow -n \equiv -2 \pmod 7 \Rightarrow n \equiv 2 \pmod 7. \end{aligned}$$

Donc, si $d = 7$, nécessairement $n \equiv 2 \pmod 7$.

Réciproquement, soit n un entier naturel tel que $n \equiv 2 \pmod 7$. Alors,

- $3n + 1 \equiv 3 \times 2 + 1 \pmod 7$ ou encore $3n + 1 \equiv 0 \pmod 7$;
- $2n + 3 \equiv 2 \times 2 + 3 \pmod 7$ ou encore $2n + 3 \equiv 0 \pmod 7$.

Donc, si $n \equiv 2 \pmod 7$, alors les entiers a et b sont divisibles par 7 et donc $d = 7$.

On a montré que

$$\boxed{\text{pour tout entier naturel } n,\ \text{PGCD}(3n + 1, 2n + 3) = \left\{ \begin{array}{l} 7 \text{ si } n \equiv 2 \pmod 7 \\ 1 \text{ sinon} \end{array} \right. .}$$

4) Puisque $9 \leqslant \sqrt{12} < 16$, $\sqrt{12} = 3, \ldots$.

- **Etape 1.** $N = 1$ puis $\dfrac{12}{1} - \text{Ent}\left(\dfrac{12}{1}\right) = 0$. Donc l'algorithme affiche : 1 et 12 puis $N = 2$.
- **Etape 2.** $2 \leqslant \sqrt{12}$ puis $\dfrac{12}{2} - \text{Ent}\left(\dfrac{12}{2}\right) = 0$. Donc l'algorithme affiche : 2 et 6 puis $N = 3$.
- **Etape 3.** $3 \leqslant \sqrt{12}$ puis $\dfrac{12}{3} - \text{Ent}\left(\dfrac{12}{3}\right) = 0$. Donc l'algorithme affiche : 3 et 4 puis $N = 4$.
- **Etape 4.** $4 > \sqrt{12}$. Donc l'algorithme s'arrête.

Au bout du compte, l'algorithme affiche

$$\begin{array}{cc} 1 & 12 \\ 2 & 6 \\ 3 & 4 \end{array}$$

c'est-à-dire la liste des diviseurs de 12. De manière générale, la condition $\dfrac{A}{N} - \text{Ent}\left(\dfrac{A}{N}\right) = 0$ équivaut au fait que N est un diviseur de A et donc

$$\boxed{\text{l'algorithme donne la liste de tous les diviseurs d'un entier donné.}}$$

