Antilles Guyane 2012. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 (5 points) (commun à tous les candidats)

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par

$$\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{n+1}{2n} u_n \end{cases}.$$

1) Calculer u_2, u_3 et u_4.

2) a) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est strictement positif.

b) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.

c) Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?

3) Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$v_n = \frac{u_n}{n}.$$

a) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme v_1.

b) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul,

$$u_n = \frac{n}{2^n}.$$

4) Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[1; +\infty[$ par $f(x) = \ln x - x \ln 2$.

a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.

b) Vérifier que pour tout entier naturel n, $2^n = e^{n \ln 2}$.
En déduire la limite de la suite (u_n).

