

EXERCICE 3 : corrigé

$$\begin{aligned}
 1) \bullet u_2 &= u_{1+1} = \frac{1+1}{2 \times 1} u_1 = \frac{1}{2}. \\
 \bullet u_3 &= u_{2+1} = \frac{2+1}{2 \times 2} u_2 = \frac{3}{4} u_2 = \frac{3}{8}. \\
 \bullet u_4 &= u_{3+1} = \frac{3+1}{2 \times 3} u_3 = \frac{4}{6} u_3 = \frac{4}{6} \times \frac{3}{8} = \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

$$u_2 = \frac{1}{2}, u_3 = \frac{3}{8} \text{ et } u_4 = \frac{1}{4}.$$

2) a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel non nul n , $u_n > 0$.

$$\begin{aligned}
 \bullet u_1 &= \frac{1}{2} > 0. \\
 \bullet \text{ Soit } n \geq 1. &\text{ Supposons que } u_n > 0. \text{ Alors } u_{n+1} = \frac{n+1}{2n} u_n > 0.
 \end{aligned}$$

On a montré par récurrence que pour tout entier naturel non nul n , $u_n > 0$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On sait que $u_n \neq 0$ puis

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{n+1}{2n} \leq \frac{n+n}{2n} = 1.$$

Puisque $u_n > 0$, on en déduit encore que $u_{n+1} \leq u_n$.

On a montré que pour tout entier naturel non nul n , $u_{n+1} \leq u_n$ et donc la suite (u_n) est décroissante.

La suite (u_n) est décroissante.

c) La suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. Donc la suite (u_n) converge vers un réel positif ou nul.

La suite (u_n) est convergente vers un réel positif ou nul.

$$3) a) v_1 = \frac{u_1}{1} = \frac{1}{2}. \text{ Soit } n \in \mathbb{N}^*.$$

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{n+1} = \frac{1}{n+1} \times \frac{n+1}{2n} u_n = \frac{u_n}{2n} = \frac{1}{2} \times \frac{u_n}{n} = \frac{1}{2} v_n.$$

Donc la suite (v_n) est géométrique de premier terme $v_1 = \frac{1}{2}$ et de raison $q = \frac{1}{2}$.

b) On sait alors que pour tout entier naturel non nul n ,

$$v_n = v_1 q^{n-1} = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{2^n}.$$

Mais alors, pour tout entier naturel non nul n , $u_n = n v_n = \frac{n}{2^n}$.

Pour tout entier naturel non nul n , $u_n = \frac{n}{2^n}$.

4) a) Pour tout réel $x \geq 1$, $f(x) = x \left(-\ln 2 + \frac{\ln x}{x} \right)$. D'après un théorème de croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$.

On en déduit que $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\ln 2 + \frac{\ln x}{x} = -\ln 2 < 0$. Comme d'autre part $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(-\ln 2 + \frac{\ln x}{x} \right) = -\infty.$$

b) • Soit n un entier naturel. $\ln(2^n) = n \ln 2$ et donc $2^n = e^{n \ln 2}$.

• On sait déjà que la suite (u_n) converge car la suite (u_n) est décroissante et minorée par 0. Ensuite, pour tout entier naturel non nul n ,

$$u_n = \frac{n}{2^n} = \frac{e^{\ln n}}{e^{n \ln 2}} = e^{\ln n - n \ln 2} = e^{f(n)}.$$

D'après la question précédente, $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(n) = -\infty$ et donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{f(n)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$