Rochambeau 2011. Enseignement spécifique

EXERCICE 2 : corrigé

Partie A

On note D_1 (respectivement D_2) l'événement « le premier ordinateur choisi est défectueux » (respectivement « le deuxième ordinateur choisi est défectueux »).

La probabilité demandée est $p(D_1 \cap D_2)$.

$$p(D_1 \cap D_2) = p(D_1) \times p_{D_1}(D_2) = \frac{3}{25} \times \frac{2}{24} = \frac{1}{100}.$$

$$\boxed{\text{La probabilité que les deux ordinateurs soient défectueux est } \frac{1}{100}.}$$

Partie B

1) Soit t un réel positif.

$$p(X \leqslant t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^t = 1 - e^{-\lambda t}$$

puis $p(X > t) = 1 - p(X \leqslant t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}$. Par suite

$$p(X > 5) = 0,4 \Leftrightarrow e^{-5\lambda} = 0,4 \Leftrightarrow -5\lambda = \ln\left(\frac{2}{5}\right) \Leftrightarrow 5\lambda = \ln\left(\frac{5}{2}\right) \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{5}\ln\left(\frac{5}{2}\right),$$

avec $\frac{1}{5}\ln\left(\frac{5}{2}\right) = 0,18$ à 10^{-2} près.

2) La probabilité demandée est $p_{X>3}(X > 5)$.

$$\begin{aligned} p_{X>3}(X > 5) &= \frac{p((X > 5) \cap (X > 3))}{p(X > 3)} = \frac{p(X > 5)}{p(X > 3)} = \frac{e^{-5\times 0,18}}{e^{-3\times 0,18}} = \frac{e^{-0,9}}{e^{-0,54}} = e^{-0,36} \\ &= 0,698 \text{ à } 10^{-3} \text{ près par excès.} \end{aligned}$$

3) a) Notons X le nombre d'ordinateurs dont la durée de vie est supérieure à 5 ans. La variable aléatoire X est régie par un schéma de Bernoulli. En effet,

- 10 expériences identiques et indépendantes sont effectuées ;
- chaque expérience a deux issues : « l'ordinateur a une durée de vie supérieure à 5 ans » avec une probabilité $p = 0,4$ ou « l'ordinateur a une durée de vie inférieure à 5 ans » avec une probabilité $1 - p = 0,6$.

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,4$.

La probabilité demandée est $p(X \geqslant 1)$. Or

$$p(X \geqslant 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - \binom{10}{0}(0,4)^0(0,6)^{10} = 1 - 0,6^{10} = 0,994 \text{ arrondi au millième.}$$

b) Dans cette question n est un entier naturel non nul quelconque et $p(X \geqslant 1) = 1 - 0,6^n$. Puis

$$\begin{aligned} p(X \geqslant 1) \geqslant 0,999 &\Leftrightarrow 1 - 0,6^n \geqslant 0,999 \Leftrightarrow 0,001 \geqslant 0,6^n \\ &\Leftrightarrow \ln(0,001) \geqslant \ln(0,6^n) \text{ (par stricte croissance de la fonction } \ln \text{ sur }]0,+\infty[) \\ &\Leftrightarrow n\ln(0,6) \leqslant \ln(0,001) \Leftrightarrow n \geqslant \frac{\ln(0,001)}{\ln(0,6)} \text{ (car } \ln(0,6) < 0) \\ &\Leftrightarrow n \geqslant 13,5\ldots \\ &\Leftrightarrow n \geqslant 14 \text{ (car } n \text{ est un entier).} \end{aligned}$$

Le nombre minimal d'ordinateurs que l'on doit choisir pour que la probabilité que l'un au moins des ordinateurs ait une durée de vie supérieure à 5 ans soit supérieure à 0,999 est 14.

 © Jean-Louis Rouget, 2014. Tous droits réservés.