Réunion 2011. Enseignement spécifique

EXERCICE 3 : corrigé

Partie A

1) a) Pour tout réel x, $e^{2x}+1>1$ et en particulier, pour tout réel x, $e^{2x}+1\neq 0$. Donc la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que quotient de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. De plus, pour tout réel x,

$$f'(x)=0-4\frac{e^x\left(e^{2x}+1\right)-e^x\left(2e^{2x}\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^2}=-4\frac{e^x\left(e^{2x}+1-2e^{2x}\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^2}=-4\frac{e^x\left(1-e^{2x}\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^2}=\frac{4e^x\left(e^{2x}-1\right)}{\left(e^{2x}+1\right)^2}.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x,\ f'(x)=\frac{4e^x(e^{2x}-1)}{(e^{2x}+1)^2}.}$$

b) Pour tout réel $x>0$, $2x>0$ et donc $e^{2x}>1$ puis $e^{2x}-1>0$. D'autre part, pour tout réel $x>0$, $4e^x>0$ et $(e^{2x}+1)^2>0$. On en déduit que pour tout réel $x>0$, $f'(x)>0$.

Ainsi, la fonction f' est strictement positive sur $]0,+\infty[$ et donc la fonction f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$.

$$\boxed{\text{La fonction } f \text{ est strictement croissante sur } [0,+\infty[.}$$

2) Soit x un réel.

$$f(-x)=1-\frac{4e^{-x}}{e^{-2x}+1}=1-\frac{\dfrac{4}{e^x}}{\dfrac{1}{e^{2x}}+1}=1-\frac{\dfrac{4}{e^x}}{\dfrac{e^{2x}+1}{e^{2x}}}=1-\frac{4}{e^x}\times\frac{e^{2x}}{e^{2x}+1}=1-\frac{4e^x}{e^{2x}+1}=f(x).$$

En résumé, pour tout réel x, $f(-x)=f(x)$. Donc deux points de $\mathscr{C}$ d'abscisses opposées ont la même ordonnée et par suite, la droite d'équation $x=0$ est un axe de symétrie de $\mathscr{C}$.

$$\boxed{\text{La courbe } \mathscr{C} \text{ est symétrique par rapport à l'axe } (Oy).}$$

3) a) Soit a l'abscisse du point A. a est un réel positif solution de l'équation $f(X)=0$. Soit X un réel.

$$f(X)=0\Leftrightarrow 1-\frac{4e^X}{e^{2X}+1}=0\Leftrightarrow\frac{e^{2X}-4e^X+1}{e^{2X}+1}=0\Leftrightarrow e^{2X}-4e^X+1=0\ (\text{car } e^{2X}+1\neq 0)$$
$$\Leftrightarrow\left(e^X\right)^2-4\left(e^X\right)+1=0\Leftrightarrow e^X \text{ est solution de l'équation } x^2-4x+1=0.$$

Le discriminant de l'équation $x^2-4x+1=0$ est $\Delta=(-4)^2-4\times1\times1=12$. Donc l'équation $x^2-4x+1=0$ admet deux solutions réelles distinctes à savoir $x_1=\dfrac{4+\sqrt{12}}{2}=\dfrac{4+2\sqrt{3}}{2}=\dfrac{2\left(2+\sqrt{3}\right)}{2}=2+\sqrt{3}$ et $x_2=2-\sqrt{3}$.

Ensuite, puisque $2+\sqrt{3}>0$ et $2-\sqrt{3}>0$, pour tout réel X on a

$$f(X)=0\Leftrightarrow e^X=2+\sqrt{3}\text{ ou } e^X=2-\sqrt{3}\Leftrightarrow X=\ln\left(2+\sqrt{3}\right)\text{ ou } X=\ln\left(2-\sqrt{3}\right).$$

Enfin, $\ln\left(2+\sqrt{3}\right)=1,3\ldots>0$ et $\ln\left(2-\sqrt{3}\right)=-1,3\ldots<0$. Par suite, l'équation $f(X)=0$ admet une solution positive et une seule à savoir $\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$ ou encore

$$\boxed{a=\ln\left(2+\sqrt{3}\right).}$$

b) Puisque la fonction f est strictement croissante sur $[0,+\infty[$, si $0\leqslant x<a$, on a $f(x)<f(a)=0$ et si $x>a$, on a $f(x)>0$. Puisque la courbe $\mathscr{C}$ est symétrique par rapport à (Oy), on en déduit le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x :

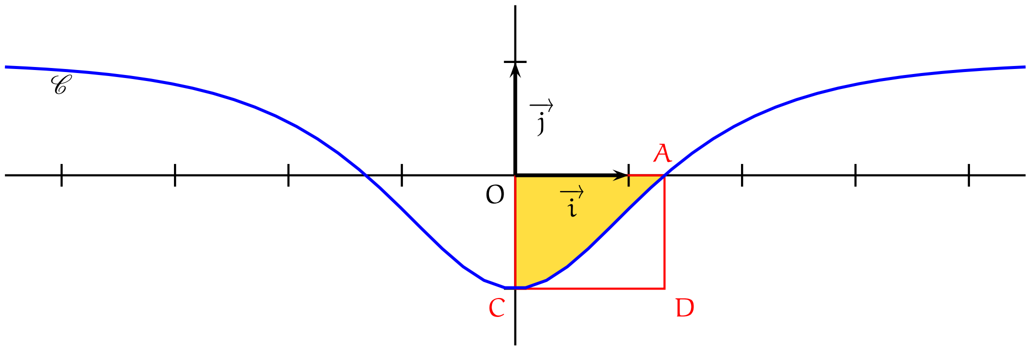
x	$-\infty$		$\ln\left(2-\sqrt{3}\right)$		$\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Partie B

1) La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$. Donc la fonction F est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ (la fonction F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$). Pour tout réel x, on a $F'(x) = f(x)$. Le signe de la fonction f a été étudié à la question 3)b) de la partie A. On en déduit le tableau de variations de la fonction F :

x	$-\infty$		$\ln\left(2-\sqrt{3}\right)$		$\ln\left(2+\sqrt{3}\right)$		$+\infty$
$F'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
F		↗		↘		↗	

2) D'après la question 3)b) de la partie A, la fonction f est négative sur $[0, a]$ et donc $-F(a)$ est l'aire du domaine $\mathscr{D}$ du plan compris entre l'axe des abscisses, la courbe $\mathscr{C}$ et les droites d'équations respectives $x = 0$ et $x = a$. En particulier, $-F(a) \geqslant 0$ ou encore $F(a) \leqslant 0$.



Notons C le point de coordonnées $(0, f(0)) = (0, -1)$ et D le point de coordonnées $(a, -1)$. Puisque la fonction f est croissante sur $[0, a]$, le domaine $\mathscr{D}$ est contenu dans le rectangle OADC. Son aire $-F(a)$ est inférieure ou égale à l'aire de ce rectangle c'est-à-dire $1 \times a = a$. Ainsi, $-F(a) \leqslant a$ ou encore $F(a) \geqslant -a$. En résumé,

$$\boxed{-a \leqslant F(a) \leqslant 0.}$$

3) a) Soit t un réel positif. On a $e^{2t} + 1 \geqslant e^{2t} > 0$ et donc $\dfrac{1}{e^{2t}+1} \leqslant \dfrac{1}{e^{2t}}$. Ensuite, puisque $-4e^t < 0$, on en déduit que $-4\dfrac{e^t}{e^{2t}+1} \geqslant -4\dfrac{e^t}{e^{2t}}$ puis que $f(t) \geqslant 1 - 4\dfrac{e^t}{e^{2t}} = 1 - 4e^{-t}$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel positif } t,\ f(t) \geqslant 1 - 4e^{-t}.}$$

b) Soit x un réel positif. Pour tout réel t de $[0, x]$, $f(t) \geqslant 1 - 4e^{-t}$ et donc, par croissance de l'intégrale, on obtient

$$F(x) = \int_0^x f(t)\ dt \geqslant \int_0^x \left(1 - 4e^{-t}\right)\ dt = \left[t + 4e^{-t}\right]_0^x = x + 4e^{-x} - 4 \geqslant x - 4.$$

$$\boxed{\text{Pour tout réel positif } x,\ F(x) \geqslant x - 4.}$$

Puisque $\lim\limits_{x \to +\infty} x - 4 = +\infty$, on en déduit encore que

$$\boxed{\lim_{x \to +\infty} F(x) = +\infty.}$$

4) Soit t un réel négatif ou nul. Alors, $e^{2t} + 1 \geqslant 1$ puis $\dfrac{1}{e^{2t}+1} \leqslant 1$ puis $-\dfrac{4e^t}{e^{2t}+1} \geqslant -4e^t$ et donc

$$f(t) = 1 - \frac{4e^t}{e^{2t}+1} \geqslant 1 - 4e^t.$$

Soit x un réel strictement négatif. Puisque pour tout réel t de $[x, 0]$ on a $f(t) \geqslant 1 - 4e^t$, par croissance de l'intégrale on en déduit que

$$\int_x^0 f(t)\ dt \geqslant \int_x^0 \left(1 - 4e^t\right)\ dt = \left[t - 4e^t\right]_x^0 = -4 - (x - 4e^x) = -x - 4 + 4e^x$$

et par suite,

$$F(x) = -\int_x^0 f(t)\ dt \leqslant x + 4 - 4e^x.$$

On sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ et donc $\lim\limits_{x \to -\infty} x + 4 - 4e^x = -\infty$. Mais alors

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} F(x) = -\infty.}$$

