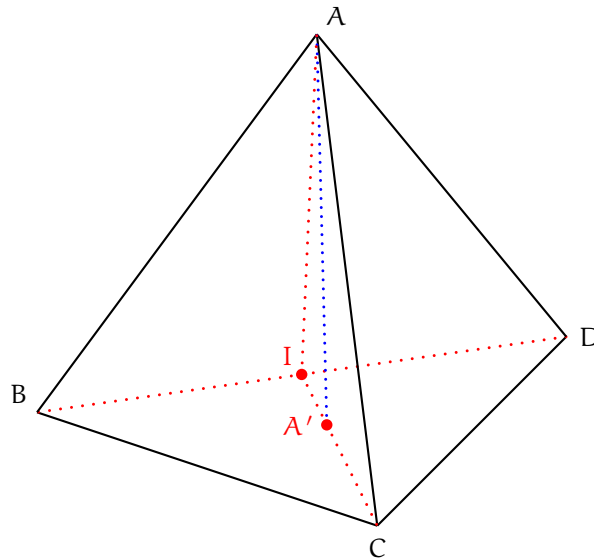


EXERCICE 2 : corrigé

Partie I

1) a)



Soit I le milieu du segment [BD]. Puisque le triangle ABD est équilatéral, la droite (AI) est la médiatrice du segment [BD] dans le triangle ABD. Par suite, $\overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$. D'autre part, puisque le triangle BCD est équilatéral et que A' est le centre de gravité du triangle BCD, la droite (A'I) est également la médiatrice du segment [BD] dans le triangle BCD. Par suite, $\overrightarrow{IA'} \cdot \overrightarrow{BD} = 0$. Mais alors,

$$\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IA'}) \cdot \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AI} \cdot \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{IA'} \cdot \overrightarrow{BD} = 0.$$

Par symétrie des rôles des points C et D, on a de même $\overrightarrow{AA'} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$.

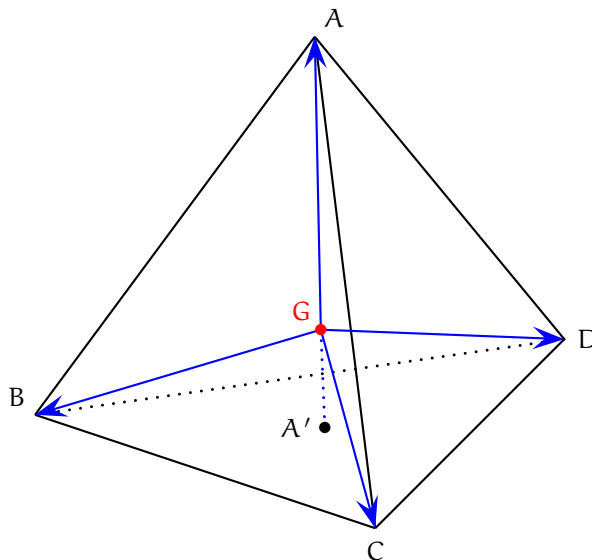
b) D'après la question précédente, la droite (AA') est orthogonale aux droites (BC) et (BD) ou encore la droite (AA') est orthogonale à deux droites sécantes du plan (BCD). On sait alors que la droite (AA') est orthogonale à la face BCD.

2) a) Soit J le milieu du segment [BC]. On sait que $\overrightarrow{JA'} = \frac{1}{3}\overrightarrow{JD}$. On en déduit que

$$\begin{aligned} \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{A'D} &= \overrightarrow{A'J} + \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{A'J} + \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{A'J} + \overrightarrow{JD} \\ &= 3\overrightarrow{A'J} + \overrightarrow{JD} \quad (\text{car } \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC} = \overrightarrow{0}) \\ &= -3\overrightarrow{JA'} + 3\overrightarrow{JA'} \\ &= \overrightarrow{0}. \end{aligned}$$

b) La relation de CHASLES permet d'écrire

$$\begin{aligned} \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} + \overrightarrow{GD} &= \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'D} \\ &= 4\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{A'D} \\ &= 4\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'A} \quad (\text{d'après la question précédente}) \\ &= -4\overrightarrow{A'G} + 4\overrightarrow{A'G} \\ &= \overrightarrow{0}. \end{aligned}$$



c) On en déduit que $\overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{B'A} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{B'B} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{B'C} + \overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{B'D} = \vec{0}$ puis $4\overrightarrow{GB'} + \overrightarrow{B'B} = \vec{0}$ (d'après la question 2)a)) et enfin $\overrightarrow{B'G} = \frac{1}{4}\overrightarrow{B'B}$.

d) Puisque $\overrightarrow{A'G} = \frac{1}{4}\overrightarrow{A'A}$, les vecteurs $\overrightarrow{A'G}$ et $\overrightarrow{A'A}$ sont colinéaires ou encore les points A, A' et G sont alignés. Donc le point G appartient à la médiane (AA').

De même, le point G appartient aux droites (BB'), (CC') et (DD'). Donc les médianes du tétraèdre ABCD sont concourantes en G.

Partie II

1) $OP = \sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{14}$ et $OQ = \sqrt{4^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{21}$. Donc $OP \neq OQ$. Par suite, le triangle OPQ n'est pas équilatéral puis le tétraèdre OPQR n'est pas régulier.

2) D'après la question 2)a) de la partie I, on a $\overrightarrow{P'O} + \overrightarrow{P'Q} + \overrightarrow{P'R} = \vec{0}$. On en déduit que

- $(0 - x_{P'}) + (4 - x_{P'}) + (-2 - x_{P'}) = 0$ puis $3x_{P'} = 2$ puis $x_{P'} = \frac{2}{3}$.
- $(0 - y_{P'}) + (2 - y_{P'}) + (3 - y_{P'}) = 0$ puis $3y_{P'} = 5$ puis $y_{P'} = \frac{5}{3}$.
- $(0 - z_{P'}) + (-1 - z_{P'}) + (0 - z_{P'}) = 0$ puis $3z_{P'} = -1$ puis $z_{P'} = -\frac{1}{3}$.

Les coordonnées du point P' sont $\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

3) Le vecteur $\overrightarrow{OQ}$ a pour coordonnées (4, 2, -1) et le vecteur $\overrightarrow{OR}$ a pour coordonnées (-2, 3, 0). Ces vecteurs ne sont pas colinéaires et donc les points O, Q et R définissent bien un plan et un seul.

Soit $\mathcal{P}$ le plan d'équation $3x + 2y + 16z = 0$.

- $3x_O + 2y_O + 16z_O = 0$. Donc le point O appartient au plan $\mathcal{P}$.
- $3x_Q + 2y_Q + 16z_Q = 12 + 4 - 16 = 0$. Donc le point Q appartient au plan $\mathcal{P}$.
- $3x_R + 2y_R + 16z_R = -6 + 6 + 0 = 0$. Donc le point R appartient au plan $\mathcal{P}$.

Puisque les points O, Q et R appartiennent au plan $\mathcal{P}$ et que ces points définissent un unique plan, le plan (OQR) est le plan $\mathcal{P}$ ou encore une équation cartésienne du plan (OQR) est $3x + 2y + 16z = 0$.

4) Un vecteur normal au plan (OQR) est alors le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées (3, 2, 16). Le vecteur $\overrightarrow{PP'}$ a quant à lui pour coordonnées $\left(\frac{2}{3} - 1, \frac{5}{3} - 2, -\frac{1}{3} - 3\right)$ ou encore $\left(-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{10}{3}\right)$.

S'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{PP'} = k\vec{n}$, alors d'une part, $3k = -\frac{1}{3}$ et donc $k = -\frac{1}{9}$, mais aussi $2k = -\frac{1}{3}$ et donc $k = -\frac{1}{6}$ ce qui est impossible.

Donc les vecteurs $\overrightarrow{PP'}$ et $\vec{n}$ ne sont pas colinéaires ou encore la médiane (PP') n'est pas orthogonale à la face opposée OQR. La propriété ($\mathcal{P}_1$) n'est donc pas vraie pour le tétraèdre OPQR et plus généralement, la propriété ($\mathcal{P}_1$) n'est pas nécessairement vraie dans un tétraèdre quelconque.