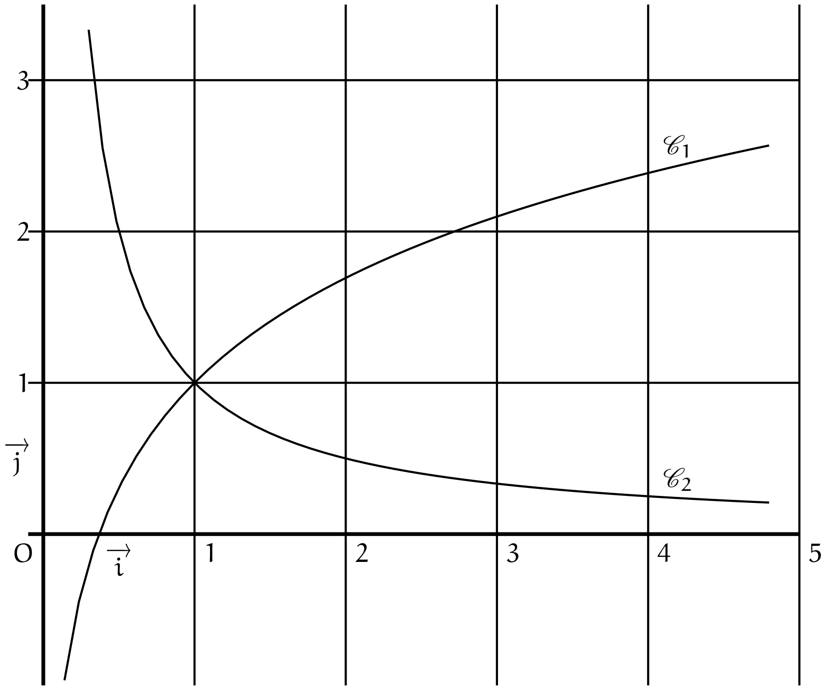
Pondichéry 2011. Enseignement spécifique

EXERCICE 1 (10 points) (commun à tous les candidats)

Partie I

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormal, les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ représentatives de deux fonctions f_1 et f_2 définies sur l'intervalle $]0;+\infty[$.



On sait que :

- l'axe des ordonnées est asymptote aux courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$
- l'axe des abscisses est asymptote à la courbe $\mathscr{C}_2$
- la fonction f_2 est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$
- la fonction f_1 est continue et strictement croissante sur l'intervalle $]0;+\infty[$
- la limite quand x tend vers $+\infty$ de $f_1(x)$ est $+\infty$.

Pour chacune des trois questions de cette partie, une seule des trois propositions est exacte. Le candidat indiquera sur la copie la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée. Chaque réponse juste rapporte 0,5 point. Une réponse fausse ou l'absence de réponse n'est pas sanctionnée.

1) La limite quand x tend vers 0 de $f_2(x)$ est

- 0
- $+\infty$
- On ne peut pas conclure

2) La limite quand x tend vers $+\infty$ de $f_2(x)$ est

- 0
- $0,2$
- On ne peut pas conclure

3) Le tableau de signes de $f_2(x) - f_1(x)$ est :

•

x	0	$+\infty$
$f_2(x) - f_1(x)$	$\parallel$	$+$

•

x	0	$+\infty$
$f_2(x) - f_1(x)$	$\parallel$	$-$

•

x	0		1		$+\infty$
$f_2(x) - f_1(x)$	$\parallel$	$+$	0	$-$	

Partie II

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $f(x) = \ln(x) + 1 - \dfrac{1}{x}$.

1) Déterminer les limites de la fonction f aux bornes de son ensemble de définition.

2) Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]0,+\infty[$.

3) En déduire le signe de $f(x)$ lorsque x décrit l'intervalle $]0,+\infty[$.

4) Montrer que la fonction F définie sur l'intervalle $]0,+\infty[$ par $F(x) = x\ln x - \ln x$ est une primitive de la fonction f sur cet intervalle.

5) Démontrer que la fonction F est strictement croissante sur l'intervalle $[1,+\infty[$.

6) Montrer que l'équation $F(x) = 1 - \frac{1}{e}$ admet une unique solution dans l'intervalle $[1, +\infty[$ qu'on note α.

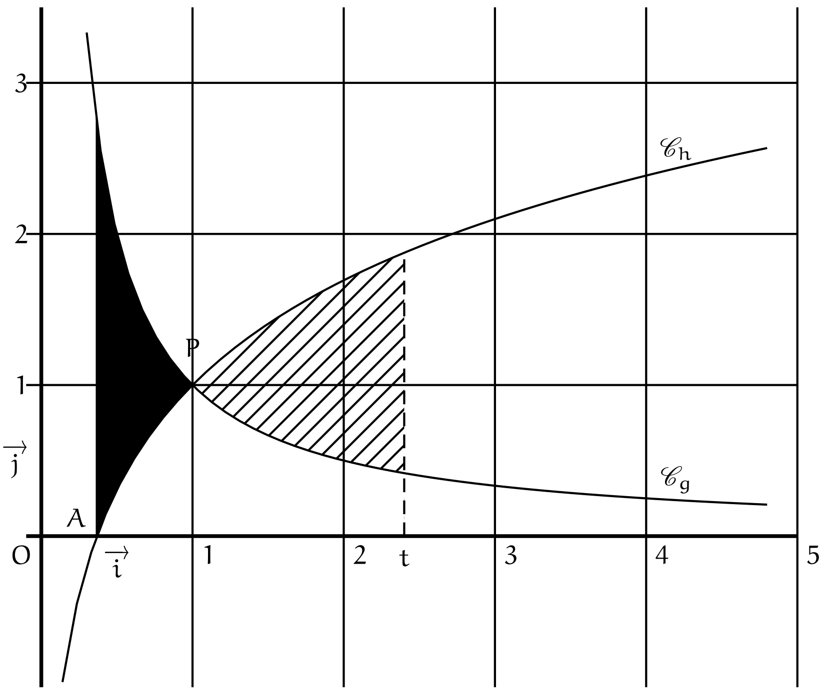
7) Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

Partie III

Soit g et h les fonctions définies sur l'intervalle $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = \frac{1}{x} \quad \text{et} \quad h(x) = \ln(x) + 1.$$

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormal, les courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ représentatives des fonctions g et h.



1) A est le point d'intersection de la courbe $\mathscr{C}_h$ et de l'axe des abscisses. Déterminer les coordonnées du point A.

2) P est le point d'intersection des courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$. Justifier que les coordonnées du point P sont $(1, 1)$.

3) On note $\mathscr{A}$ l'aire du domaine délimité par les courbes $\mathscr{C}_g$, $\mathscr{C}_h$ et les droites d'équations respectives $x = \frac{1}{e}$ et $x = 1$ (domaine en noir sur le graphique).

a) Exprimer l'aire $\mathscr{A}$ à l'aide de la fonction f définie dans la partie **II**.

b) Montrer que $\mathscr{A} = 1 - \frac{1}{e}$.

4) Soit t un nombre réel de l'intervalle $]1, +\infty[$. On note $\mathscr{B}_t$ l'aire du domaine délimité par les droites d'équations respectives $x = 1$, $x = t$ et les courbes $\mathscr{C}_g$ et $\mathscr{C}_h$ (domaine hachuré sur le graphique).

On souhaite déterminer une valeur de t telle que $\mathscr{A} = \mathscr{B}_t$.

a) Montrer que $\mathscr{B}_t = t\ln(t) - \ln(t)$.

b) Conclure.

